

Pesagens contra falsários

Os problemas de pesagens são muito populares entre os entusiastas da Matemática Recreativa. Alguns podem ser muito divertidos, e nem sempre são fáceis.

Vejamos um clássico:

Material: 12 moedas aparentemente iguais das quais uma é falsa. A moeda falsa não pesa o mesmo que as outras, mas não se sabe se é mais leve ou mais pesada.

Problema: Com uma balança de pratos descubra qual é a falsa, e se é mais leve ou mais pesada que as outras, em três pesagens.

A balança que se utiliza nestes problemas é, se não houver indicação em contrário, uma balança de pratos, que indica somente qual a mais pesada de duas cargas.



Vamos dar os nomes A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K e L às moedas. Começemos por pesar quatro em cada prato da balança, por exemplo A, B, C e D de um lado e E, F, G e H do outro.

Caso 1. Se os pratos se equilibrarem então as moedas envolvidas nesta pesagem são todas verdadeiras.



Pesemos então A, B e C (que são verdadeiras) contra I, J e K.

Caso 1a. Se se equilibrarem, então a falsa é L. Uma pesagem de L contra uma verdadeira (por exemplo, A) diz-nos se a falsa é mais pesada ou mais leve.

Caso 1b. Consideremos o caso em que o prato da esquerda é mais pesado (o desequilíbrio inverso seria tratado de forma semelhante):



Neste caso ficamos imediatamente a saber que a moeda falsa é uma das que se encontram no prato direito e que é mais leve do que as verdadeiras.

Uma última pesagem, I contra J, permite concluir qual é a falsa.

Caso 2. Se não equilibrarem, sem perda de generalidade vamos supor que o prato esquerdo é mais pesado.



Vamos agora pesar D, E, F e G contra H, I, J e K.

Caso 2a. Se houver equilíbrio, então é porque a falsa é uma entre A, B e C e necessariamente mais pesada que as verdadeiras. Uma pesagem de A contra B esclarece completamente a situação.

Caso 2bi. Suponhamos que há desequilíbrio da forma ilustrada: Neste caso a falsa é D e é pesada, ou é H e é leve. Uma pesagem de D contra A esclarece completamente a situação.



Caso 2bii. Se o desequilíbrio for em sentido inverso:



Então a falsa é uma entre E, F e G e é mais leve que as verdadeiras. Uma pesagem de E contra F esclarece completamente a situação.

Estes procedimentos podem ser indicados esquematicamente:

$$\begin{array}{l}
 ABCD = EFGH \left\{ \begin{array}{l}
 ABC > JJK \left\{ \begin{array}{l}
 I < J \leftrightarrow I \text{ leve} \\
 I = J \leftrightarrow K \text{ leve} \\
 J > J \leftrightarrow J \text{ leve}
 \end{array} \right. \\
 ABC = JJK \left\{ \begin{array}{l}
 A < L \leftrightarrow L \text{ pesada} \\
 A > L \leftrightarrow L \text{ leve}
 \end{array} \right. \\
 ABC < JJK \left\{ \begin{array}{l}
 I < J \leftrightarrow J \text{ pesada} \\
 I = J \leftrightarrow K \text{ pesada} \\
 I > J \leftrightarrow I \text{ pesada}
 \end{array} \right.
 \end{array} \right. \\
 \\
 ABCD > EFGH \left\{ \begin{array}{l}
 DEFG < HIJK \left\{ \begin{array}{l}
 E < F \leftrightarrow E \text{ leve} \\
 E = F \leftrightarrow G \text{ leve} \\
 E > F \leftrightarrow F \text{ leve}
 \end{array} \right. \\
 DEFG = HIJK \left\{ \begin{array}{l}
 A < B \leftrightarrow B \text{ pesada} \\
 A = B \leftrightarrow C \text{ pesada} \\
 A > B \leftrightarrow A \text{ pesada}
 \end{array} \right. \\
 DEFG > HIJK \left\{ \begin{array}{l}
 D > A \leftrightarrow D \text{ pesada} \\
 D = A \leftrightarrow H \text{ leve}
 \end{array} \right.
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Para manter os leitores ocupados até ao próximo número da *Gazeta*, aqui ficam quatro problemas desta família, da autoria de Dick Hess. As soluções, bem como outros *puzzles*, estão disponíveis em <http://ludicum.org>.

1. Material: 11 moedas (10 iguais, uma diferente das outras).

Problema: Usando duas pesagens com uma balança de pratos descobre se a falsa é mais leve ou mais pesada do que as outras.

2. Material: 5 moedas das quais se sabe que são todas verdadeiras (10g) ou há duas falsas. Se houver duas falsas uma é mais leve do que as verdadeiras (9g), a outra é mais pesada (11g).

Problema: Com três pesagens numa balança de pratos identifica a falsa leve (se existir) e a falsa pesada (se existir).

3. Material: 6 moedas das quais 2 são falsas. As falsas são ambas mais pesadas do que as verdadeiras, mas têm pesos diferentes.

Problema: Com três pesagens numa balança de pratos descobre as moedas falsas.

4. Material: 4 moedas das quais se sabe terem os pesos 4, 5, 6 e 7 gramas.

Problema: Com quatro pesagens numa balança de pratos descobre o peso de cada moeda.

