Jorge Nuno Silva
Universidade
de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu

ADIVINHAÇÃO MATEMÁTICA

A Matemática Recreativa tem muita magia, no sentido em que muitas atividades de entretenimento são simultaneamente mágicas e matemáticas. Os autores mais consagrados da literatura, como Fibonacci (século XIII) e Pacioli (séculos XV-XVI), propuseram vários truques notáveis, alguns com cartas, outros com dados, outros ainda puramente aritméticos. Hoje vamos propor aos nossos leitores um truque de Luca Pacioli que surge no seu *De Viribus Quantitatis*, do começo do século XVI.

De Viribus Quantitatis[1] é uma obra incontornável, ainda hoje objeto de estudo, em parte por se tratar de um livro exclusivamente de Matemática Recreativa escrito por um matemático muito relevante.

A situação é a seguinte. Um voluntário pensa num número e soma-lhe a sua metade. Se a determinação da metade originar um número não inteiro, deve arredondar-se por excesso. Ao número assim obtido aplica-se o mesmo procedimento. Agora, comunica-se ao Mágico a parte inteira da divisão do número obtido por 9, assim como as ocorrências em que foi necessário proceder a arredondamento para permanecer nos inteiros. O Mágico ouve e adivinha o número original.

Vejamos um exemplo. Eu penso no 10. 10 mais metade de 10 é 15. 15 mais metade de 15 é 22.5, pelo que se passa a 23. Como $23 \div 9 = 2.5\ldots$, eu digo ao Mágico "deu 2 e tive problemas na segunda operação". Este ouve e responde "10 era o teu número original". Em notação óbvia, onde uma seta simples significa ausência de arredondamento e a dupla indica que tal arredondamento foi necessário (a última seta representa a divisão por 9):

$$10 \rightarrow 15 \Rightarrow 23 \rightarrow 2$$

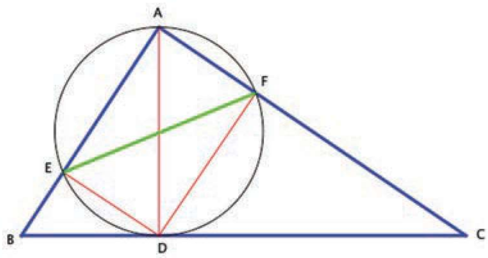
Mais dois exemplos:

$$5 \Rightarrow 8 \rightarrow 12 \rightarrow 1 \qquad\qquad 31 \Rightarrow 47 \Rightarrow 71 \rightarrow 7$$

Em qualquer caso, o Mágico ouve o resultado final, bem como o registo dos arredondamentos, e adivinha o número inicial. Como?

Sobre as questões do número anterior:

Invariância: Dado um triângulo acutângulo ABC, baixando uma altura, encontramos um ponto D na base do triângulo. Por D tracemos perpendiculares sobre os outros dois lados, obtendo assim os pontos E e F. Mostre que o comprimento do segmento EF independe do vértice a partir do qual se traçou a altura.



Façamos a construção a partir do vértice A. Como $\angle DFA$ e $\angle DEA$ são retos, a circunferência de diâmetro AE contém E e F (Tales). Aplicando a Lei dos Senos a $\triangle AFE$, obtemos

$$\frac{EF}{\hat{A}} = \frac{AE}{\angle AFE}$$

Como $AE = AD\angle ADE$ e $\angle AFE = \angle ADE$ (subentendem o mesmo arco), vem $EF = AD\hat{A}$.

Como $AD = AB\hat{B}$, tem-se $EF = AB\hat{A}\hat{B}$. É bem conhecido que $AB = 2R\hat{C}$, onde R é o raio da circunferência circunscrita ao $\triangle ABC$. Portanto,

$$EF = 2R\hat{A}\hat{B}\hat{C}$$

donde se conclui que chegaríamos ao mesmo valor se tivéssemos iniciado este processo noutro vértice, B ou C.

Dança das cadeiras: Há n cadeiras à volta de uma mesa redonda. Há n pessoas que vão chegar consecutivamente e sentar-se. A primeira escolhe o seu lugar como quiser. A partir daqui, para $1 \leqslant k \leqslant n-1$, a $(k+1)$-ésima pessoa senta-se k lugares à direita da k-ésima pessoa. Para que valores de n é que este procedimento funciona sem constrangimentos?

Ignorando, para já, a circularidade, temos que a k-ésima pessoa senta-se no lugar

$$1 + \cdots + k - 1 = \frac{k(k-1)}{2}$$

Como a mesa é circular, temos choque de vontades entre a pessoa p e a pessoa q $(1 \leqslant p < q \leqslant n)$ quando

$$\frac{q(q-1)}{2} - \frac{p(p-1)}{2}$$

for múltiplo de n. Ou, o que é equivalente, quando $(q-p)(q+p-1)$ for múltiplo de $2n$.

Suponhamos que n não é uma potência de 2. Então $2n = r2^s$ para algum r ímpar. Seja $u = \max\{r, 2^s\}$, $v = \min\{r, 2^s\}$. Então

$$p = \frac{1}{2}(u - v + 1) \qquad \text{e} \qquad q = \frac{1}{2}(u + v + 1)$$

satisfazem $p \leqslant n$, $q \leqslant n$, $u = p + q - 1$, $v = q - p$, portanto $2n = (q-p)(q+p-1)$, o que equivale a conflito.

Se n for uma potência de 2, então, para que $(q-p)(q+p-1)$ seja um múltiplo de $2n$, atendendo a que se trata de um produto de dois fatores de paridades distintas, um dos fatores deve ser múltiplo de $2n$, o que é impossível, já que $q - p < q \leqslant n$ e $q + p - 1 < 2q \leqslant 2n$.

Conclusão: as pessoas sentam-se sossegadamente se o seu número é uma potência de 2. (Agradecemos a Omar, o nosso leitor Luís Madureira, a contribuição de uma resolução deste problema).

Muitos restos: A Laura divide 365 sucessivamente por 1, 2, 3,..., 365 e soma todos os restos. O Manuel, por sua vez, divide 366 por 1, 2, 3,..., 366 e soma todos os restos obtidos. Quem conseguiu soma maior?

Quando a Laura divide 365 por n $(1 \leqslant n \leqslant 365)$ obtém um quociente q e um resto r:

$$365 = qn + r \qquad (0 \leqslant r \leqslant n-1)$$

donde se obtém a divisão de 366 por n,

$$366 = qn + r + 1 \qquad (0 \leqslant r \leqslant n-1)$$

exceto quando $r + 1 = n$, caso em que o resto do Manuel evanesce. Assim, para cada $n \leqslant 365$, se n divide 366, o resto da Laura excede o do Manuel em $n-1$; se n não divide 366, o resto do Manuel excede o da Laura numa unidade. Os divisores de 366 são 1, 2, 3, , 6, 61, 122, 183 e 366. Portanto a Laura ganha 0+1+2+5+60+121+182, isto é, 371, enquanto o Manuel acumula $366 - 8 = 358$. A Laura ganha por 13. (Luís Madureira enviou uma resolução para este problema, que agrademos).

Descobrir a combinação: Um aloquete de código usa uma combinação de três dígitos de 0 a 9. Sempre que, quando se faz uma tentativa que tem, pelo menos, um dígito certo (no lugar certo), o aloquete, que fala, diz "Quente!". Se a tentativa não contiver nenhum dígito correto (na posição certa), o cadeado grita "Frio!". Por exemplo, se a combinação correta for 014, as tentativas 099 e 014 originam ambas a resposta "Quente!", enquanto a tentativa 140 obtém um grito de "Frio!".

De quantas tentativas se precisa para ter a certeza de descobrir a combinação correta, qualquer que ela seja?

Vejamos uma estratégia que usa, no máximo, 13 tentativas. Tentamos as dez combinações $000, 111, \ldots, 999$. Neste processo, vamos ouvir "Quente!" uma, duas ou três vezes. Se for uma, então será em resposta a uma tentativa que acertou na combinação. Se ouvirmos duas vezes, por exemplo em resposta a aaa e bbb, então a combinação certa usa somente os dígitos a e b. Tentando acc, cac e cca $(c \neq a,\ c \neq b)$ esclarecemos as posições do a e deduzimos a combinação correta em, no máximo, 13 tentativas. Se for três, digamos em resposta a aaa, bbb e ccc, as tentativas

[1] Ver Tiago Hirth, *Luca Pacioli and his 1500 book De Viribus Quantitatis*, FCUL 2015

add e *dad* ($d \neq a$, $d \neq b$, $d \neq c$) esclarecem a posição do a. Suponhamos que é a primeira posição. Tentando agora *dbc* ($d \neq a$, $d \neq b$, $d \neq c$) esclarecemos se a combinação certa é *abc* ou *acb*.

Seja n o número de combinações possíveis. Cada tentativa divide estas n combinações possíveis em dois conjuntos: o das combinações compatíveis com "Quente!" e o das compatíveis com "Frio!". Logo, no pior cenário, ficamos com, pelo menos, $n/2$ combinações viáveis. Assim, após k tentativas, temos ainda de enfrentar $n/2^k$ possibilidades. Em particular, se $n > 2^k$ então k tentativas não chegam sempre para deduzir a combinação certa. Suponhamos agora que, após seis tentativas, só ouvimos "Frio!". Eliminámos, no máximo, seis dígitos para cada posição. Restam então, pelo menos, $4 \times 4 \times 4 = 64$ possibilidades. Se $n > 64 = 2^6$, a nossa observação anterior mostra que mais seis tentativas podem não bastar para determinar a combinação certa. Se $n = 64$, pensemos na próxima (sétima) tentativa. Sem perda de generalidade, suponhamos que as seis primeiras eliminaram os dígitos 0, 1, 2, 3, 4 e 5 de todas as posições e a nova tentativa é 666. Se agora ouvirmos "Frio!", ficamos com $3 \times 3 \times 3 = 27$ possibilidades, o que mostra que se ouvirmos "Quente!" esse número é 37. Como $37 > 2^5$, pela nossa observação acima, 12 tentativas podem não bastar.

Concluímos assim que, para ter a certeza de deduzir a combinação certa, necessitamos de 13 tentativas.