A MATEMÁTICA DA ORDEM DE MOVIMENTAÇÃO DAS PEÇAS DA TORRE DE HANÓI

Débora Borges Ferreira[a] e Edvan Pontes de Oliveira[b]

Universidade Federal do Rio Grande do Norte[a], Escola Estadual Francisco de Assis Bittencourt [b]

debora@ccet.ufrn.br[a]; edvan.pontes@hotmail.com[b]

Neste trabalho descrevemos a configuração da Torre de Hanói após a *i*-ésima jogada.

1. INTRODUÇÃO

A Torre de Hanói foi popularizada pelo matemático francês Édouard Lucas no ano de 1892, [1]. O famoso quebra-cabeças é composto por uma base e três pinos A, B e C; no pino A estão dispostos n discos de tamanhos distintos, do maior para o menor. O objetivo do jogo é transferir os discos de A para C de modo a que em cada movimento apenas um disco seja movido e os discos maiores nunca fiquem sobre os menores. Outras variações deste desafio surgiram no início do século XX, sendo a mais famosa a Torre de Hanói com quatro pinos, citada em [2]. Mais curiosidades sobre o jogo estão em [3].

Há uma solução para o jogo utilizando a menor quantidade de movimentos possível; para n discos são necessários $2^n - 1$ movimentos para concluir o jogo. Suponha que esta solução é interrompida na jogada i. Neste trabalho descrevemos a configuração da torre nesse instante, isto é, em que pino cada um dos discos estará.

Proposição 1. *Considere uma torre com n discos e seja a_n a quantidade mínima de jogadas para vencer o jogo, então $a_n = 2^n - 1$.*

Demonstração. Para transferir o maior disco para o pino final C, devemos primeiramente mover todos os $n-1$ discos para o pino intermediário B com a_{n-1} movimentos; uma vez que todos os $n-1$ discos estão no pino B, o maior disco ficará livre para ser transferido para o pino C com um movimento, totalizando $a_{n-1}+1$ movimentos. Em seguida, transferimos todos os $n-1$ discos para o pino C com mais a_{n-1} movimentos, totalizando $a_{n-1}+1+a_{n-1} = 2\cdot a_{n-1}+1 = a_n$. Em suma, acabámos de obter uma forma recursiva: $a_n = 2a_{n-1}+1$.

Usando a recursividade, queremos provar que $a_n = 2^n - 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$, com $n > 0$. Para $n = 1$ temos apenas um movimento, e $a_1 = 2^1 - 1 = 1$. Suponha por indução que para algum $n > 1$, $a_n = 2^n - 1$. Como $a_n = 2\cdot a_{n-1}+1$, então

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2\cdot a_n + 1 \\ &= 2\cdot(2^n - 1) + 1 \\ &= 2^{n+1} - 1. \end{aligned}$$

Logo, $a_n = 2^n - 1$ é verdadeiro para todo o n natural positivo. □

2. DESCOBRINDO O DISCO MOVIDO NO *I*-ÉSIMO MOVIMENTO

Imagine que estamos solucionando o quebra-cabeças, e queremos saber que peça será movida na jogada i. Para responder a essa pergunta, estudaremos com que frequência cada disco é movido, ou ainda a ordem de movimentação dos discos.

Proposição 2. *Sejam uma torre com n discos e um certo disco k, $k \leq n$. Então, o seu primeiro movimento durante a solução do quebra-cabeça será na jogada 2^{k-1}.*

Demonstração. Seja uma torre com n discos. Para mover o disco k pela primeira vez, é necessário mover os $k-1$ discos menores que estão em cima dele. Pela proposição 1, para mover $k-1$ discos de um pino para outro, são necessários $2^{k-1}-1$ movimentos. Assim, o primeiro movimento de k será na jogada $2^{k-1}-1+1 = 2^{k-1}$. □

Uma observação importante é sobre a ordem dos movimentos do disco k nos pinos. Se o primeiro movimento foi para o pino B, então os $k-1$ discos menores mover-

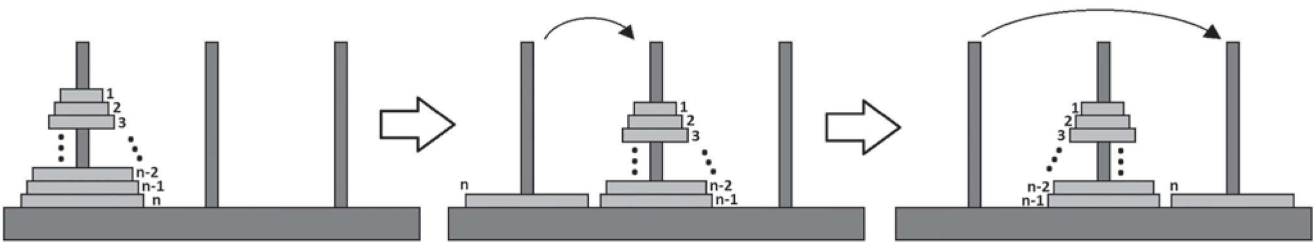

Figura 1. Solucionando o jogo com n discos.

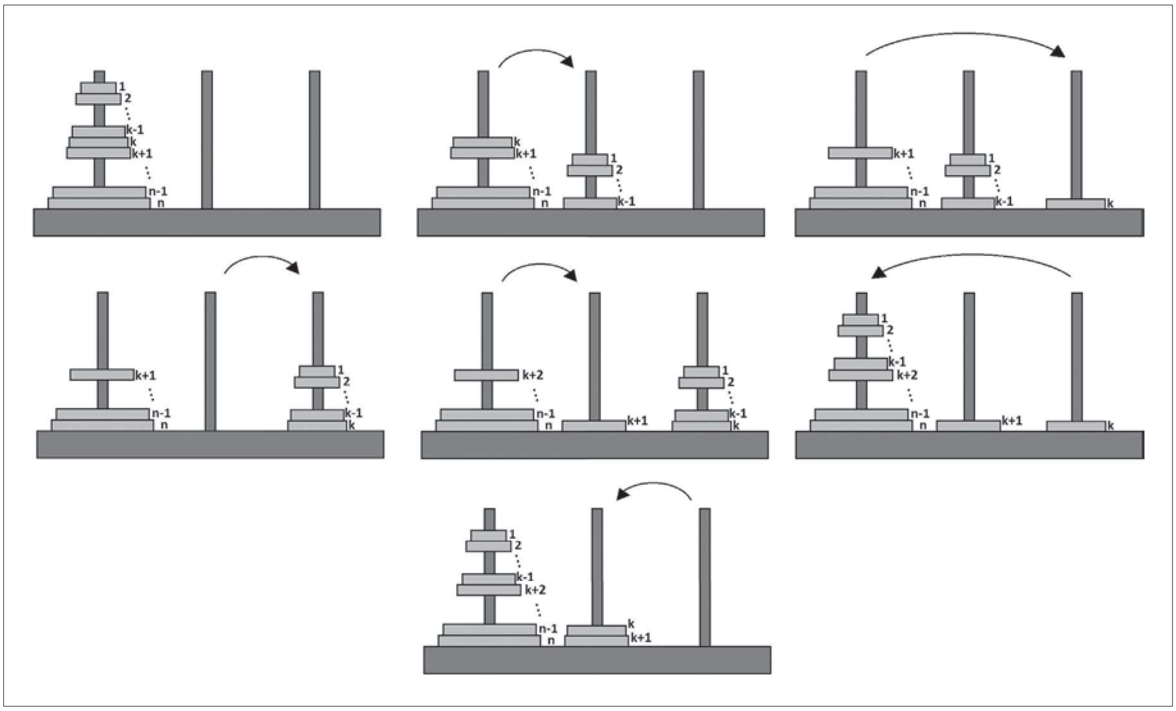

Figura 2. Ordem dos movimentos do disco k.

-se-ão para B, o disco $k+1$ se mover-se-á para C, os $k-1$ menores para A, para que o disco k se mova para C. Seguindo esse raciocínio, o próximo movimento de k será para o pino A. Os seus movimentos são cíclicos na ordem (B, C, A) ou (C, B, A), caso o seu primeiro movimento tenha sido para C. Note que se a ordem de k for (B, C, A), então a ordem de $k+1$ e de $k-1$ será (C, B, A). Como o único movimento do disco n deve ser para o pino C, então se n e k tiverem a mesma paridade, colocamos a ordem (C, B, A) para k. Caso tenham paridades distintas, então (B, C, A) será a ordem de movimentos de k.

Proposição 3. *Considere uma Torre de Hanói com n discos. Seja $o_{k,p}$ o número da jogada em que o disco k será movido pela p-ésima vez. Fixado $k \leq n$, a sequência numérica $(o_{k,p})$ é uma progressão aritmética de razão 2^k e $o_{k,1} = 2^{k-1}$.*

Demonstração. $o_{k,1} = 2^{k-1}$ pela proposição 2. Sem perda de generalidade, suponha que k e n têm a mesma paridade. A configuração do jogo após o primeiro movimento do disco k está na terceira torre da figura 2. Continuando a solução do quebra-cabeças, transferimos os $k-1$ discos menores que estão em B para o pino C, colocando-os em cima do disco k, usando $2^{k-1} + 2^{k-1} - 1 = 2^k - 1$ movimentos. Agora, o único movimento possível do jogo será mover o disco $k+1$ para o pino intermediário com um movimento, resultando em $2^k - 1 + 1 = 2^k$ movimentos. Por fim, os $k-1$ discos devem ir para o pino inicial, pois o disco k precisará de ir ao pino intermediário, com $2^k + 2^{k-1} - 1$ movimentos. Sendo assim, o disco k ficará livre para ir para o pino intermediário com um movimento, gerando um total de $2^k + 2^{k-1} - 1 + 1 = 2^k + 2^{k-1}$ movimentos (o segundo movimento do disco k será na jogada $2^k + 2^{k-1}$ e a última torre da figura 2 representa o segundo movimento do disco k). Logo, $o_{k,1} = 2^{k-1}$ e $o_{k,2} = 2^k + 2^{k-1}$.

O terceiro movimento do disco k ocorrerá após transferirmos os $k-1$ discos menores para cima do disco k, ou seja, para o pino B, o disco $k+2$ para o C (único movimento possível); para transferir os discos que estão em B para C, primeiro os $k-1$ discos menores vão para C e então o

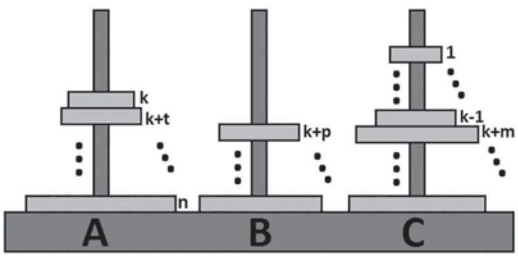

Figura 3. Configuração da Torre após mover o disco k.

disco k será movido para A, totalizando

$$2^{k-1}-1+\underbrace{1}_{disco\ k+2}+2^{k-1}-1+\underbrace{1}_{disco\ k}=2^k \text{ movimentos;}$$

logo, $o_{k,3}=o_{k,2}+2^k$, e $o_{k,3}-o_{k,2}=2^k$.

Sem perda de generalidade, suponha que, após certo movimento do disco k, este se encontra no pino A sobre discos maiores que ele, como a sua ordem é (C,B,A) ele veio do pino B e os $k-1$ discos menores estão em C sobre um certo disco $k+m$, caso contrário seria impossível mover o disco k de acordo com as regras do jogo. Vamos contar quantos movimentos serão necessários até ao próximo movimento do disco k. Os próximos e únicos possíveis passos são transferir os $k-1$ menores discos do pino C para cima do disco k, usando $2^{k-1}-1$ movimentos. Após esses movimentos, só haverá um único movimento possível no jogo usando os discos dos pinos B ou C; suponha que é o disco $k+p$ a ser movido para o pino C, onde $0<p,t,m\leq n-k$ e $p\leq m$. O disco k veio do pino B e está em A, logo o seu próximo movimento deve ser para o pino C, pois os discos movem-se em ciclos, alternando entre os pinos; para isso movemos novamente os $k-1$ menores discos para B, e o disco k para o pino C (únicos movimentos possíveis também), totalizando

$$2^{k-1}-1+\underbrace{1}_{disco\ k+p}+2^{k-1}-1+\underbrace{1}_{disco\ k}=2^k \text{ movimentos.}$$

□

Teorema 1. *Considere uma torre com n discos. O disco movido na i-ésima jogada será o disco k obtido unicamente ao reescrever i na forma $(2p-1)\cdot 2^{k-1}$, onde p será o número de vezes que o disco k foi movido.*

Demonstração. Segundo as proposições 2 e 3, para k fixado, com $k\leq n$, $(o_{k,p})$ é uma progressão aritmética de razão 2^k e termo geral $o_{k,p}=o_{k,1}+(p-1)\cdot 2^k$. Logo,

$$\begin{aligned} o_{k,p} &= 2^{k-1}+(p-1)\cdot 2^k \\ \Rightarrow o_{k,p} &= (2p-2+1)\cdot 2^{k-1} \\ \Rightarrow o_{k,p} &= (2p-1)\cdot 2^{k-1} \qquad (1) \end{aligned}$$

□

Agora, estamos interessados em saber que peça é movida no i-ésimo movimento. Para isso, temos de resolver a equação

$$(2p-1)\cdot 2^{k-1}=i,$$

isto é, encontrar k e p que a satisfazem. Observamos que $2p-1$ é um número ímpar, então basta fatorar i de modo a que tenhamos um ímpar vezes uma potência de 2. Como i é um número natural, então o Teorema Fundamental da Aritmética garante a unicidade de p e k.

Exemplo 1. *Resolvendo as Torres de Hanói com oito discos, que disco é movido na 100ª jogada considerando a quantidade mínima de movimentos?*

Solução: Pelo teorema 1, temos:

$$(2p-1)\cdot 2^{k-1}=100.$$

Como p e k são números naturais, então podemos fatorizar 100 e retirar as potências de 2. Sendo assim, resolvendo uma equação exponencial, obtemos

$$(2p-1)\cdot 2^{k-1} = 25\cdot 2^2.$$

Assim, $2p-1=25$ e $2^{k-1}=2^2$, e então $p=13$ e $k=3$.

Logo, o disco movido na centésima jogada é o disco 3 e o mesmo foi movido 13 vezes.

3. CONFIGURAÇÃO GERAL DA TORRE APÓS PARAR NA *I*-ÉSIMA JOGADA

Suponha que o quebra-cabeças com n discos está a ser resolvido e para numa certa jogada i. Qual a configuração da torre no exato momento de paragem? Para isso, temos de descobrir quantos movimentos foram realizados com cada disco até à jogada i.

Pelo teorema 1 encontramos o disco que foi movido na jogada i e quantas vezes, resolvendo a expressão $i=(2p-1)\cdot 2^{k-1}$. Descobertos os valores de k e p e sabendo que o seu movimento é cíclico, do tipo (C,B,A)ou (B,C,A), descobrimos em que pino o disco k se encontra ao efetuarmos a divisão por 3 e verificando o resto. Para a sequência (C,B,A), resto 0 significa pino A, resto 1 significa pino C e resto 2 significa pino B.

Agora, queremos saber onde estão os outros $n-1$ discos, por exemplo, o disco k_0, quantas vezes ele se moveu até à jogada i e em que pino se encontra.

Note que ao isolar p em $i=(2p-1)\cdot 2^{k-1}$, encontramos

$$p=\frac{i+2^{k-1}}{2^k},$$

que é a quantidade de movimentos do disco k até à jogada i. Para k_0 no lugar de k, esse quociente não será inteiro. Desejamos encontrar o maior j possível, $j\leq i$, tal que $j=(2p_0-1)\cdot 2^{k_0-1}$, ou seja, p_0 é a quantidade de vezes que o disco k_0 se moveu até à jogada i:

$$p_0=\frac{j+2^{k_0-1}}{2^{k_0}}.$$

Observe que

$$\frac{j+2^{k_0-1}}{2^{k_0}}\leq\frac{i+2^{k_0-1}}{2^{k_0}},$$

ou seja, para $\lfloor x \rfloor = \max\{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x\}$ podemos tomar

$$p_0 = \left\lfloor \frac{i + 2^{k_0 - 1}}{2^{k_0}} \right\rfloor.$$

Exemplo 2. *Certa pessoa a brincar com o jogo Torre de Hanói com cinco discos, realizou alguns movimentos e parou na 10ª jogada. Qual a configuração da Torre de Hanói considerando a quantidade mínima de jogadas?*

Solução. $i = 10$ e $1 \leq k \leq 5$.
Para o disco 1, temos a sequência (C, B, A), (n, k ímpares):

$$\begin{aligned} p &= \left\lfloor \frac{10 + 2^{1-1}}{2^1} \right\rfloor = 5 \\ 5 &= 3 \cdot 1 + 2 \\ &\to \textit{pino } B. \end{aligned}$$

Para o disco 2, temos a sequência (B, C, A), (n ímpar, k par):

$$\begin{aligned} p &= \left\lfloor \frac{10 + 2^{2-1}}{2^2} \right\rfloor = 3 \\ 3 &= 3 \cdot 1 + 0 \\ &\to \textit{pino } A. \end{aligned}$$

Para o disco 3, temos a sequência (C, B, A), (n ímpar, k ímpar):

$$\begin{aligned} p &= \left\lfloor \frac{10 + 2^{3-1}}{2^3} \right\rfloor = 1 \\ 1 &= 3 \cdot 0 + 1 \\ &\to \textit{pino } C. \end{aligned}$$

Para o disco 4, temos a sequência (B, C, A), (n ímpar, k par):

$$\begin{aligned} p &= \left\lfloor \frac{10 + 2^{4-1}}{2^4} \right\rfloor = 1 \\ 1 &= 3 \cdot 0 + 1 \\ &\to \textit{pino } B. \end{aligned}$$

Para o disco 5, temos a sequência (C, B, A), (n ímpar, k ímpar):

$$\begin{aligned} p &= \left\lfloor \frac{10 + 2^{5-1}}{2^5} \right\rfloor = 0 \\ 0 &= 3 \cdot 0 + 0 \\ &\to \textit{pino } A. \end{aligned}$$

Assim, o pino A contém os discos 2 e 5, o pino B os discos 1 e 4, e o pino C o disco 3.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1] Lucas, E., *Récréations Mathématiques*, Albert Blanchard, Paris (1892).

[2] Dudeney, H. E., *The Canterbury Puzzles*, New York: E. P. Dutton and Co, New York (1908).

[3] Pereira, A., Rodrigues, R.,"O Problema das Torres de Hanói: a lenda, algoritmos e generalizações", *Gazeta de Matemática 144*, Portugal (2003).

SOBRE OS AUTORES

Débora Borges Ferreira é professora do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, na cidade de Natal, RN, Brasil, desde 2006. Concluiu o mestrado e o doutoramento em Matemática na Universidade de Brasília, Distrito Federal. É professora do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) desde 2011.

Edvan Pontes de Oliveira é professor na Escola Estadual em Tempo Integral Francisco de Assis Bittencourt, na cidade de João Câmara, RN, Brasil, desde 2016. Concluiu a graduação e o mestrado em Matemática (PROFMAT) na Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN).