LAGRANGE, AS MULTAS E OS RECORDES DE ATLETISMO

A velocidade média diz-nos alguma coisa sobre a velocidade instantânea? E sobre outras velocidades médias?

João Filipe Queiró
Universidade de Coimbra
jfqueiro@mat.uc.pt

1. INTRODUÇÃO

O Artigo 27.º do Código da Estrada [5] fixa os limites gerais de velocidade nas vias públicas. Salvo casos especiais, os condutores não podem exceder certas velocidades instantâneas, dependendo do tipo de vias.

Este Artigo 27.º remete implicitamente para duas questões matemáticas importantes.

A primeira é o próprio conceito de velocidade instantânea, não definido no Código, e sobre o qual se diz apenas que é medido "em quilómetros/hora". Na ausência de definição, é de presumir que o legislador está a pensar no número indicado por um velocímetro, seja este de que tipo for. Descontemos a circularidade desta forma de pensar e observemos que a velocidade instantânea é um conceito estritamente matemático: é a derivada em cada instante do "espaço percorrido" em função do tempo. Este é um dos primeiros exemplos vistos quando estudamos derivadas e é uma das principais motivações iniciais para esse estudo.

A segunda questão matemática importante do Código da Estrada é suscitada pela interrogação óbvia: indo além da definição, como é que as autoridades controlam na prática a velocidade instantânea dos automóveis nas estradas, para depois sancionarem quem exceda os limites legais?

O processo mais conhecido consiste em usar um aparelho que se aponta ao veículo e que imediatamente fornece a velocidade instantânea, tipicamente emitindo um sinal de radar ou laser e analisando a frequência do sinal reflectido pelo objecto em movimento.

O presente artigo é motivado por um segundo processo, que é referido no mesmo artigo do Código da Estrada, no seu número 4:

> *Para os efeitos do disposto nos números anteriores, considera-se que viola os limites máximos de velocidade instantânea o condutor que percorrer uma determinada distância a uma velocidade média incompatível com a observância daqueles limites (...).*

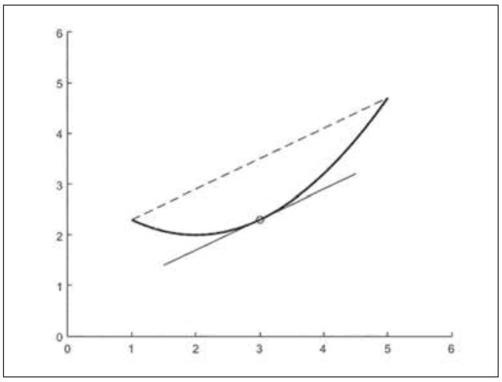
Isto é operacionalizado identificando o veículo num ponto da estrada e voltando a identificá-lo depois de ele percorrer determinada distância. O tempo decorrido entre as duas identificações permite calcular a velocidade média do veículo no troço em causa.

O código nada diz sobre o que é uma "velocidade média incompatível" com a observância dos limites legais. O senso comum, que qualquer um entende, aponta para algo muito simples: se a velocidade média exceder o limite para a velocidade instantânea no troço, o condutor terá de certeza excedido, em algum momento, esse mesmo limite.

2. O TEOREMA DE LAGRANGE

O facto matemático que aqui está presente, e que subjaz ao tal "senso comum", é um dos teoremas mais fundamentais do cálculo diferencial elementar, o Teorema de Lagrange ou do valor médio. Diz o teorema que, se uma função real for contínua num intervalo fechado e diferenciável no seu interior, então existe um ponto no interior onde a derivada da função coincide com o valor médio dela no intervalo. Em símbolos: se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ for contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$, existe $\theta \in]a,b[$ tal que

$$f'(\theta) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$



Sobre este teorema podemos fazer várias observações:

1. A demonstração é simples e pode ver-se em qualquer livro introdutório de Análise. Reduzimo-nos primeiro ao caso particular em que $f(a) = f(b)$ (situação em que ao resultado se chama por vezes Teorema de Rolle) e usamos de forma decisiva a completude do conjunto dos números reais. Esta propriedade básica de $\mathbb{R}$ pode ser apresentada de várias maneiras quando se ensina Análise, sendo uma das mais habituais a seguinte: qualquer que seja a forma de escrever $\mathbb{R}$ como uma reunião de dois subconjuntos A e B tais que qualquer elemento de A é menor do que qualquer elemento de B, existe de certeza $c \in \mathbb{R}$ tal que $\forall_{a\in A, b\in B} \quad a \le c \le b$.

   Isto é parecido com a definição de $\mathbb{R}$ pelos chamados "cortes de Dedekind" mas não é a mesma coisa.

2. Curiosamente, não só o Teorema de Lagrange é consequência da completude de $\mathbb{R}$ como lhe é mesmo equivalente [4].

3. O Teorema de Lagrange é, como muitos teoremas em Matemática, uma afirmação apenas da existência de algo. Nada no enunciado ou na demonstração diz seja o que for sobre o valor de θ. Os teoremas de existência "não construtivos", como este, são causa de alguma confusão para os não-matemáticos: pois como se pode afirmar e provar a existência de algo sem o exibir ou construir explicitamente? Não só se pode como a situação é muito frequente.[1]

O Teorema de Lagrange é exactamente o facto matemático de que precisamos para justificar a prescrição legal do n.º 4 do artigo 27.º do Código da Estrada. E este tipo de questão é normalmente uma das primeiras aplicações do teorema vistas no estudo do cálculo diferencial.

3. PROBLEMAS POSSÍVEIS

Mas há problemas potenciais. Por exemplo: como a demonstração não é construtiva, as autoridades não podem dizer quando é que o veículo, no troço em causa, excedeu o limite legal para a velocidade instantânea. O legislador provavelmente pensou nisto e resolveu o problema escrevendo que se entende que "a contraordenação é praticada no local em que terminar o percurso controlado". Esta redacção resolve um problema formal mas tem vulnerabilidades. O condutor pode dizer − e se calhar até provar − que no final do percurso controlado a sua velocidade era inferior ao limite legal: "Eu nesse momento até ia a 10 km/h..."

Um problema de outro tipo pode surgir se o condutor afirmar que a forma como percorreu a distância em causa não satisfaz as hipóteses do Teorema de Lagrange, mais precisamente a da diferenciabilidade da função espaço percorrido (a da continuidade seria mais difícil de contestar). Isto é, o automobilista pode dizer que a sua técnica de condução é tal que, por vezes, não há diferenciabilidade da função. Aqui o condutor não terá sorte, porque há versões do Teorema de Lagrange para o caso em que f pode não ser diferenciável em todos os pontos de $]a,b[$. Por exemplo [2], se o conjunto D dos pontos em que f não é diferenciável for finito (ou mesmo numerável) então

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le \sup_{\theta\in]a,b[\setminus D} f'(\theta)$$

e portanto a velocidade média continua a dar a informação desejada.

Mesmo assim, seria interessante assistir a uma contestação judicial de um condutor a uma multa aplicada ao abrigo do n.º 4 do Artigo 27.º do Código da Estrada. Poderia haver uma discussão matemática em tribunal de consequências imprevisíveis, com análise das condições de aplicação do Teorema de Lagrange e da sua conclusão, divergências sobre a natureza dos números reais, intervenção de advogados da escola intuicionista, etc. Quem sabe se não se acabaria num recurso para o Tribunal Constitucio-