José Carlos Santos
Universidade
do Porto
jcsantos@fc.up.pt

UMA NOVA FÓRMULA DE ÁLGEBRA LINEAR?

Em meados de 2019, pareceu ter sido descoberto um novo enunciado de Álgebra Linear. Mas a história acabou por se revelar mais complicada do que poderia parecer à primeira vista.

UMA NOVA DESCOBERTA?

Terence Tao é talvez o mais famoso matemático vivo. A sua fama atrai o mais diverso tipo de solicitações, o que o obriga a limitar seriamente as propostas de trabalho ou colaboração que recebe regularmente. Aliás, ele escreve, na sua página sobre maneiras de ser contactado,[1] que não aceita pedidos de resolução de problemas matemáticos.

No entanto, em agosto de 2019 Tao abriu uma exceção a esta regra. Ele recebeu via correio eletrónico uma mensagem de três físicos (Stephen Parke, Xining Zhang e Peter Denton) com uma fórmula de Álgebra Linear que eles tinham descoberto mas cuja validade não conseguiam demonstrar. Acontece que Tao publicara, juntamente com Van Vu, um artigo (veja-se [3]) onde surgia uma fórmula semelhante e foi também por esse motivo que os físicos em questão escreveram a Tao. Para surpresa deles, Tao respondeu-lhes ao fim de somente duas horas, confirmando que a fórmula estava, de facto, correta e fornecendo-lhes três demonstrações dela. Rapidamente, os quatro (isto é, os três físicos e Tao) publicaram no arXiv uma curta pré-publicação (com somente três páginas) sobre este assunto, no qual era mencionado um outro artigo (veja-se [1]), além do de Vu e Tao, com uma fórmula semelhante.[2]

Durante algum tempo, as coisas ficaram neste ponto. Tudo mudou quando, em novembro de 2019, a *Quanta Magazine*, uma publicação *online* de divulgação científica, publicou um artigo[3] sobre este assunto. Como Tao explicou no seu blogue,[4] este artigo levou a uma vasta busca por outros textos com a fórmula em questão ou outras relacionadas. E o resultado foi ter-se chegado à conclusão de que a fórmula já tinha sido descoberta diversas vezes no passado. O artigo mais antigo detetado (até ver) com a fórmula data de 1966 ([4]) e, de facto, a fórmula é um caso-limite de um enunciado que data de 1934 ([2]).

A FÓRMULA

Vejamos então qual é a fórmula à qual nos referimos. É relativa a matrizes hermitianas, ou seja, matrizes quadradas com entradas complexas

$$H = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

para as quais se tem $\overline{a_{ji}} = a_{ij}$ sempre que $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Embora as entradas destas matrizes sejam, em geral, números complexos não necessariamente reais (exceto as entradas da diagonal principal que, essas sim, têm de ser reais), pode-se provar que têm sempre n valores próprios reais (se os contarmos com as respetivas multiplicidades).

[1] *https://www.math.ucla.edu/~tao/tags.html*

[2] *https://arxiv.org/abs/1908.03795v1*

[3] Veja-se *Neutrinos Lead to Unexpected Discovery in Basic Math*, por Natalie Wolchover; *https://www.quantamagazine.org/neutrinos-lead-to-unexpected--discovery-in-basic-math-20191113/*

[4] Veja-se *Eigenvectors from Eigenvalues: a survey of a basic identity in linear algebra*: *https://terrytao.wordpress.com/2019/12/03/eigenvectors-from-eigenvalues-a-survey-of-a-basic-identity-in-linear-algebra/*

Vamos representá-los por $\lambda_1(H), \lambda_2(H), \ldots, \lambda_n(H)$. Seja v_j um vetor próprio de norma 1 correspondente ao valor próprio $\lambda_j(H)$. Então v é da forma $(v_{j1}, v_{j2}, \ldots, v_{jn})$.

Agora consideremos, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, a matriz H_j obtida removendo de H a linha j e a coluna j. Naturalmente, cada matriz H_j é também uma matriz hermitiana com $n-1$ linhas e $n-1$ colunas. Sejam $\lambda_1(H_j), \lambda_2(H_j), \ldots, \lambda_{n-1}(H_j)$ os seus valores próprios; tal como se fez com a matriz H, vai-se supor que

$$\lambda_1(H_j) \leqslant \lambda_2(H_j) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{n-1}(H_j).$$

Só por curiosidade, note-se que se

$$\lambda_1(H) \leqslant \lambda_2(H) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n(H)$$

e se, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, os valores próprios de H_j forem ordenados de modo a ter-se $\lambda_1(H_j) \leqslant \lambda_2(H_j) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{n-1}(H_j)$, então têm lugar as *desigualdades de entrelaçamento de Cauchy*:

$$\lambda_1(H) \leqslant \lambda_1(H_j) \leqslant \lambda_2(H) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{n-1}(H_j) \leqslant \lambda_n(H).$$

Com estas notações, a fórmula em questão é: se $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, então

$$|v_{ij}|^2 \prod_{k \in \{1,2,\ldots,n\} \setminus \{i\}} \big(\lambda_i(H) - \lambda_k(H)\big) = \prod_{k=1}^{n-1} \big(\lambda_i(H) - \lambda_k(H_j)\big).$$

Em particular, se H tiver n valores próprios distintos, então

$$|v_{ij}|^2 = \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \big(\lambda_i(H) - \lambda_k(H_j)\big)}{\displaystyle\prod_{k \in \{1,2,\ldots,n\} \setminus \{i\}} \big(\lambda_i(H) - \lambda_k(H)\big)}. \tag{1}$$

Esta fórmula dá-nos assim (no caso em que os valores próprios de H são distintos) os valores absolutos das coordenadas dos vetores próprios de H, recorrendo somente ao conhecimento dos valores próprios de H bem como dos das matrizes H_j. Será possível obter não só os valores absolutos das coordenadas mas as próprias coordenadas? Não, pois se $(v_{j1}, v_{j2}, \ldots, v_{jn})$ for um vetor próprio unitário de H e se $\omega \in \mathbb{C}$ tiver valor absoluto 1, então $(\omega v_{j1}, \omega v_{j2}, \ldots, \omega v_{jn})$ também é um vetor próprio unitário de H.

É um tanto espantoso que os valores absolutos das coordenadas dos vetores próprios da matriz H possam ser obtidos somente a partir do conhecimento dos valores próprios de H, bem como dos das matrizes H_j, mas a igualdade (1) faz sentido. Por exemplo:

- Se se multiplicar H por um número real $c \neq 0$, a nova matriz ainda é hermitiana, mas os valores próprios de cH são os de H multiplicados por c. O mesmo acontece com os valores próprios das matrizes H_j. Mas então o membro da direita de (1) não sofre qualquer alteração, o que faz sentido, visto que os vetores próprios de cH são vetores próprios de H e vice-versa.
- Se se adicionar a H um múltiplo $c\,\mathrm{Id}_n$ da matriz identidade, então os valores próprios de $H + c\,\mathrm{Id}_n$ são os de H mais c, o mesmo acontecendo aos valores próprios das matrizes H_j. Logo, mais uma vez, o membro da direita de (1) não muda. Mais uma vez, isto faz sentido, pois os vetores próprios de $H + c\,\mathrm{Id}_n$ são vetores próprios de H e vice-versa.

PORQUE É QUE TEVE DE SER REDESCOBERTA?

Uma questão interessante aqui é a de saber porque é que esta fórmula teve de ser redescoberta e isto mais do que uma vez. Há precedentes históricos. Por exemplo, Pierre Wantzel publicou, em 1843, uma demonstração da impossibilidade de resolver algebricamente e usando somente números reais todas as equações de terceiro grau com coeficientes reais. Este resultado ficou esquecido e foi redemonstrado por volta de 1880 por outros dois matemáticos, Vincenzo Mollame e Otto Hölder, independentemente.

Tao e os seus coautores especularam quanto aos motivos pelos quais esta fórmula em particular ficou esquecida. Entre outras hipóteses, conjeturaram que isto se pode dever ao facto de ninguém ter dado um nome à fórmula (resolveram chamar-lhe *identidade dos vetores próprios e dos valores próprios*) e de ter sempre surgido no passado, não como um fim em si, mas como uma ferramenta para obter outros resultados.

Isto é um exemplo de como o facto de uma descoberta científica ser publicada a salva do desaparecimento, mas não do esquecimento. E também é um exemplo de como um texto de divulgação científica pode afetar a área científica que está a tentar divulgar.

REFERÊNCIAS

[1] László Erdös; Benjamin Schlein; Horng-Tzer Yau, "Universality of random matrices and local relaxation flow". *Invent. Math.* 185 (1):75–119, 2011

[2] Karl Löwner, "Über monotone Matrixfunktionen". *Math. Z.* 38 (1):177–216, 1934

[3] Terence Tao; Van Vu, "Random matrices: Universality of local eigenvalue statistics". *Acta Math.*, 206 (1):127–204, 2011

[4] R. C. Thompson, "Principal submatrices of normal and Hermitian matrices". *Illinois J. Math.* 10:296–308, 1966