JORGE NUNO SILVA
Universidade
de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu

PIZZAS, BOLOS, HIPERPLANOS E UM VELHO TRIÂNGULO

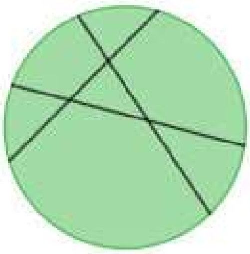
Em quantos pedaços se pode cortar uma pizza usando *n* vezes uma faca? Este é um problema bem conhecido, se bem que a formulação em termos de retas e regiões do plano seja menos comum. De forma análoga, podemos questionar-nos sobre o número máximo de pedaços de um bolo cilíndrico que se pode obter com *n* cortes planos, isto é, em quantas zonas podemos dividir o espaço euclidiano tridimensional usando *n* planos? É este o nosso tópico de hoje.

Comecemos pelo princípio. Quaisquer n pontos distintos numa reta dividem-na em $n+1$ partes.

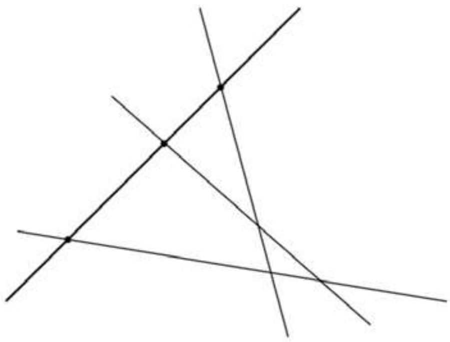
É imediato que, acrescentando um ponto, obtemos mais uma região. Assim, usando a notação $P^k(n)$ para o número máximo de regiões que n "hiperplanos" definem no espaço euclidiano k-dimensional, temos $P^1(n) = n+1$. Uma observação trivial: $P^1(n)$ é dado pela soma dos dois primeiros termos da n-ésima linha do triângulo de Pascal, isto é

$$P^1(n) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}$$

O próximo caso, bidimensional, é bem ilustrado pelas fatias de pizza.



Consideremos o caso equivalente da divisão do plano por retas. Para garantir a maximização do número de regiões, não podem surgir retas paralelas nem três retas concorrentes no mesmo ponto (em posição genérica, diz-se).



Quando se acrescenta uma $(n+1)$-ésima reta, em posição genérica, esta vê-se dividida em $P^1(n) = n+1$ pedaços pelas interseções com as retas anteriores. Cada pedaço destes divide uma região plana em duas, pelo que

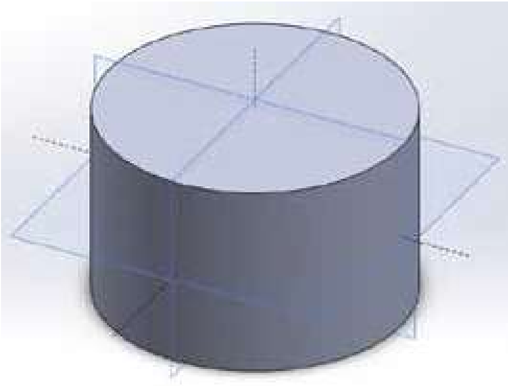
$$P^2(n+1) = P^2(n) + n + 1$$

a partir do que não é difícil obter

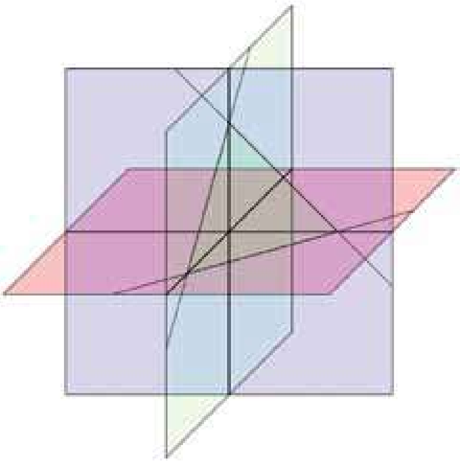
$$P^2(n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2}$$

A soma dos três primeiros termos da n-ésima linha do triângulo de Pascal!

No espaço tridimensional, um plano divide o espaço em duas regiões, dois planos em quatro e três em oito. Esta última divisão está ilustrada no bolo cilíndrico seguinte.



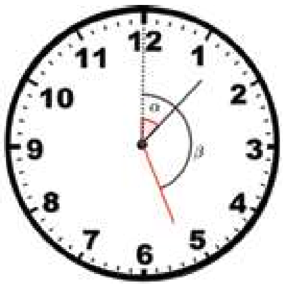
Consideremos agora o modelo equivalente das divisões do espaço euclidiano por planos. Acrescentar um quarto plano em posição genérica (ie, sem planos paralelos e sem haver nenhuma reta comum a três planos) gera 15 regiões, como se pode (tentar) ver na figura.



Será que teremos expressão semelhante, baseada no triângulo de Pascal, para $P^3(n)$? E para dimensão superior, k, como se pode calcular $P^k(n)$?

Respostas às questões do número anterior:

1. $1\,h\,5'\,(27\,3/11)''$
2. $7\,h\,5'\,(27\,3/11)''$
3. $10\,h\,20'\,(49\,1/11)''$
4. $8\,h\,18'\,(27\,9/11)''$
5. Consideremos os ângulos que os ponteiros das horas e dos minutos fazem com a vertical, α, β, respetivamente.



Seja

$$\alpha = \alpha_0 + k \qquad \beta = \beta_0 + \ell \qquad 0 \leqslant k, \ell, \leqslant 11$$

onde k, ℓ são os últimos números do mostrador que os respetivos ponteiros passaram (hora certa, para as horas, múltiplo de 5, para os minutos).

Para surgir ambiguidade, a proporção de hora percorrida pelo ponteiro dos minutos deve ser igual à proporção do espaço entre horas consecutivas percorrida pelo ponteiro das horas:

$$\frac{\beta}{360} = \frac{\alpha}{30} - k \qquad \text{e} \qquad \frac{\alpha}{360} = \frac{\beta}{30} - \ell$$

donde

$$\alpha = \frac{360(12k + \ell)}{143} \qquad \text{e} \qquad \beta = \frac{360(12\ell + k)}{143}$$

destes valores é preciso descontar os 12 casos em que $k = \ell$, porque correspondem à sobreposição dos ponteiros, que não estão associados a configurações ambíguas. Sobram assim $12 \times 11 = 132$ casos de ambiguidade num período de 12 horas. O nosso assíduo leitor Luís Madureira teve a amabilidade de enviar uma resolução deste problema, que muito agradecemos.