José Carlos Santos
Universidade
do Porto
jcsantos@fc.up.pt

DEMONSTRADO... OU TALVEZ NÃO

As demonstrações estão no centro da matemática. Mas os matemáticos são falíveis e abundam exemplos de demonstrações erradas que foram aceites durante muito tempo.

Em matemática, os resultados não se aceitam, demonstram-se. Isto é um aspeto central da matemática desde a Grécia Antiga. As melhores demonstrações de teoremas sempre foram alvo de admiração e há mesmo um livro inteiramente dedicado às demonstrações mais perfeitas conhecidas (veja-se [1]).

Mas a matemática é feita por matemáticos, os matemáticos são humanos e os humanos são falíveis. Em resultado disto, já houve um considerável número de casos em que não só um matemático fez uma suposta demonstração que, afinal, estava errada, mas também, em vários desses casos, a demonstração foi considerada correta pela comunidade matemática.

Para deixar claro o assunto que vai ser aqui abordado, convém dizer que *não* vão ser aqui vistos exemplos de demonstrações que foram controversas porque os métodos aí empregues foram considerados ilegítimos por alguns matemáticos de renome. Por exemplo, não se irá examinar a famosa expressão "Isto não é Matemática. Isto é Teologia", proferida por Paul Gordan relativamente a um dos primeiros teoremas de Hilbert[1] nem às críticas à Teoria dos Conjuntos de Cantor.[2]

O PROBLEMA DAS QUATRO CORES

O primeiro exemplo é talvez o mais famoso de todos e tem a ver com o teorema das quatro cores (é possível colorir qualquer mapa usando somente quatro cores de modo a que duas regiões com uma fronteira comum tenham cores distintas), que já foi abordado nesta rubrica (veja-se [7]). Em 1879, Alfred Bray Kempe (um advogado que também era um matemático amador) afirmou ter conseguido provar que, de facto, é possível colorir qualquer mapa usando somente quatro cores. A demonstração foi publicada nesse mesmo ano (por sugestão de Arthur Cayley, talvez o mais proeminente matemático do Reino Unido daquela época). No ano seguinte, estimulado pela demonstração de Kempe, o físico escocês Peter Tait publicou outra demonstração. Durante 11 anos foi geralmente aceite que o teorema estava demonstrado. Mas, em 1890, Percy John Heawood publicou um artigo no qual explicava que a demonstração de Kempe estava errada e o próprio Kempe admitiu que assim era. No entanto, não se deve pensar que o trabalho de Kempe foi uma perda de tempo, pois as ideias introduzidas por ele continuaram a ser usadas nesta área. Quanto à demonstração de Tait, esta foi refutada por Julius Peterson em 1891 (ou seja, tal como no caso da demonstração de Kempe, 11 anos após a sua publicação).[3]

[1] Colin McLarty, *Theology and its discontents: The origin myth of Modern Mathematics, https://webusers.imj-prg.fr/michael.harris/theology.pdf*

[2] *https://en.wikipedia.org/wiki/Controversy_over_Cantor's_theory*

[3] A história deste problema pode ser vista em *http://www-history.mcs.st--and.ac.uk/HistTopics/The_four_colour_theorem.html*

PAVIMENTAÇÕES COM PENTÁGONOS

Uma pavimentação do plano é alguma maneira de preencher o plano com algum tipo de figura, de modo a que não haja sobreposições nem fiquem espaços por cobrir.[4] Se a figura em questão for um polígono regular, só há pavimentações se o dito polígono for um triângulo, um quadrado (pense-se em papel quedriculado) ou um hexágono (como no caso dos favos de mel).

Em 1918, Karl Reinhardt, um matemático alemão, deu, na sua tese de doutoramento, cinco exemplos de pentágonos convexos (ou seja, tais que se dois pontos pertencem ao pentágono, todos os pontos do segmento de reta que os une também pertencem) com os quais é posível pavimentar o plano (todos irregulares, naturalmente). Um exemplo de pavimentação do plano com pentágonos irregulares (que não é nenhuma das cinco descobertas por Reinhardt) pode ser vista na figura 1. As coisas ficaram neste ponto durante meio século. Ninguém conseguia encontrar outros pentágonos convexos com os quais fosse possível pavimentar o plano, mas também não se conseguia provar que só havia estes. A situação mudou em 1968, quando Richard Kershner encontrou três novos pentágonos que serviam para este fim e publicou um artigo [4], onde escreveu que tinha demonstrado que estes três novos pentágonos, juntamente com os cinco de Reinhardt, eram os únicos com os quais era possível pavimentar o plano. De facto, o artigo não continha a demonstração, pois, segundo o seu autor, esta "é extremamente complexa e será publicada noutro sítio".

Não houve novidades até 1975. Nesse ano, Martin Gardner divulgou estes factos sobre pavimentações na sua coluna de divulgação de matemática da *Scientific American* (que seria republicado em [2]; veja-se também [8]). Este artigo estimulou alguns leitores e o resultado foi extraordinário: dois deles encontraram cinco novos tipos de pentágonos que podem ser usados para pavimentar o plano: uma dona de casa (Marjorie Rice, que descobriu quatro, um dos quais é o da figura 1)[5] e um programador de computadores (Richard James). Isto elevou o número de pavimentações pentagonais para 13. Uma décima quarta foi descoberta em 1985 e uma décima quinta foi descoberta em 2015.

Em 2017, Michaël Rao, um matemático francês, afirmou ter demonstrado que, agora sim, temos todas as pavimentações pentagonais do plano. A sua demonstração ainda está a ser estudada em detalhe. Até agora, não foi detetado qualquer erro.[6]

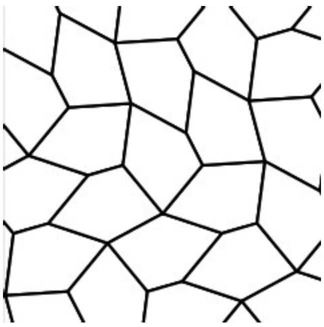

Figura 1. Pavimentação pentagonal do plano.

O PROBLEMA DE RIEMANN-HILBERT

Em 1900, no Congresso Internacional de Matemáticos, David Hilbert proferiu uma palestra na qual expôs uma lista de 23 problemas matemáticos (veja–se [3] ou [9, Apêndice]). Muita da pesquisa matemática do século seguinte esteve ligada a estes problemas. Alguns destes problemas são programas de pesquisa, enquanto outros são problemas no sentido mais tradicional do termo.

O vigésimo primeiro problema também é conhecido por "problema de Riemann-Hilbert". É um problema sobre equações diferencias lineares e foi formulado como uma pergunta, que pode ser respondida com um "sim" ou com um "não". O próprio Hilbert publicou uma solução parcial (afirmativa) do problema em 1905, mas esse seu trabalho foi superado três anos mais tarde por outra resolução (igualmente afirmativa), do matemático esloveno Josip Plemelj. Este teve uma vida longa e produtiva e, em 1964, publicou um livro sobre o assunto [5]. Morreu três anos mais tarde, convencido de que resolvera o problema.

Mas não tinha razão quanto a isto. Em 1989, o matemático russo Andrei Bolibruch mostrou que não só havia um erro na demonstração de Plemelj como, de facto, a resposta é negativa. Quanto às consequências de se considerar o problema resolvido e com resposta afirmativa, Bolibruch escreveu:

> Não consigo fazer uma estimativa de quantos artigos errados foram feitos baseados no resultado errado relativo ao vigésimo primeiro problema de Hilbert; só sei que foram muitos. Talvez uma pergunta mais correta seja: Há resultados importantes que se revelaram errados por terem empregado o resultado errado de Plemelj? Sei de, pelo menos, um tal trabalho: foi publicado em 1970 por um famoso matemático japonês, onde usou a "resolução positiva do vigésimo primeiro problema de Hilbert" para provar um resultado muito importante mas errado.

Para mais detalhes, veja-se [9, pp. 365–382].

O PROBLEMA DE BUSEMANN-PETTY

Seja n um número natural maior do que 1 e considerem-se duas regiões A e B de $\mathbb{R}^n$que sejam convexas e simétricas em relação à origem (se v pertence à região, $-v$ também pertence). No caso em que $n = 3$, as regiões em questão podem ser, por exemplo, um elipsóide ou um cubo (centrados na origem). Suponha-se agora que, sempre que H for um hiperplano de $\mathbb{R}^n$ que passa pela origem, então o volume de $A \cap H$ é menor ou igual ao volume de $B \cap H$. Resulta daqui que o volume de A é menor ou igual ao de B? Este problema foi formulado por Herbert Busemann e Clinton Myers Petty em 1956.

O problema é trivial se $n = 2$ (pois resulta das condições do enunciado que se tem $A \subset B$ nesse caso), mas durante muito tempo não se soube qual é a resposta se $n > 2$, embora fosse de esperar que esta fosse afirmativa. No entanto, provou-se em 1975 que a resposta é, de facto, negativa se $n \geqslant 12$. Nos anos que se seguiram, o valor de n a partir do qual se sabia que a resposta é negativa foi baixando e em 1992 só não se sabia qual era a resposta se $n = 3$ ou $n = 4$; a partir de $n = 5$ já se sabia que a resposta é negativa.

Em 1994, Gaoyong Zhang, um matemático norte-americano de origem chinesa, publicou (veja-se [10]), numa das mais prestigiadas revistas de matemática do mundo, o *Annals of Mathematics*, uma demonstração de que a resposta também é negativa quando $n = 4$. Mas, três anos mais tarde, foi descoberto que um dos resultados supostamente demonstrados por Zhang estava errado. Consequentemente, Zhang voltou a pensar no assunto e demonstrou que, afinal, a resposta é afirmativa quando $n = 4$, tendo publicado a sua demonstração novamente no *Annals of Mathematics* (veja-se [11]), naquele que deve ser o único caso em toda a História em que o mesmo matemático publicou na mesma revista a demonstração de um enunciado e a da sua negação.

Hoje em dia, já se sabe que a resposta ao problema também é afirmativa quando $n = 3$... a menos que venha a ser descoberto um erro na demonstração.

REFERÊNCIAS

[1] Martin Aigner; Günter, M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, 6th ed., Springer, 2018.

[2] Martin Gardner, *Tiling with convex polygons* em *Time travel and other mathematical bewilderments*, W. H. Freeman, 1988, pp. 163–176.

[3] David Hilbert, "Mathematical Problems", *Bulletin of the American Mathematical Society* 8, pp.437–479, 1902.

[4] R. B. Kershner, "On paving the plane", *American Mathematical Monthly* 75.8, pp.839–844, 1968.

[5] Josip Plemelj, *Problems in the sense of Riemann and Klein*, John Wiley & Sons, 1965.

[6] Karl Reinhardt, *Über die Zerlegung der Ebene in Polygone*, Tese de Doutoramento, Universidade de Frankfurt, 1918.

[7] José Carlos Santos, "Demonstrações com uso de computadores", *Gazeta de Matemática* 181, pp. 30–31, 2017.

[8] Doris Schattschneider, "In praise of amateurs" em *The Mathematical Gardner*, D. A. Klaner (ed.), Prindle, Weber & Schmidt, 1981, pp.140–166.

[9] Benjamin H. Yandell, *The honors class: Hilbert's problems and their solvers*, A. K. Peters, 2002.

[10] Gaoyong Zhang, "Intersection bodies and the Busemann-Petty inequalities in $\mathbb{R}^4$", *Annals of Mathematics*, Second Series, 140(2), pp. 331–346, 1994.

[11] Gaoyong Zhang, "A positive solution to the Busemann-Petty problem in $\mathbb{R}^4$", *Annals of Mathematics*, Second Series, 149(2), pp. 535–543, 1999.

[4] Mais geralmente, podem considerar-se pavimentações feitas com vários tipos de figuras, mas só iremos lidar aqui com pavimentações onde há apenas figuras de um único tipo.

[5] Veja-se *Marjorie Rice's Secret Pentagons*, de Natalie Wolchover; *https://www.quantamagazine.org/marjorie-rices-secret-pentagons-20170711*

[6] Veja-se *Pentagon Tiling Proof Solves Century-Old Math Problem*, de Natalie Wolchover; *https://www.quantamagazine.org/pentagon-tiling-proof-solves--century-old-math-problem-20170711*