No âmbito de uma colaboração entre a *Gazeta* e o Atractor, este é um espaço da responsabilidade do Atractor, relacionado com conteúdos interativos do seu *site* *www.atractor.pt* . Quaisquer reações ou sugestões serão bem-vindas para *atractor@atractor.pt*

TRIÂNGULOS DE NAPOLEÃO

A Geometria é pródiga em resultados elementares mas muito interessantes, a que G. Pólya chamou teoremas elegantes. Analisaremos um exemplo, cujo enunciado algumas fontes atribuem a Napoleão Bonaparte.

O teorema que vamos considerar afirma o seguinte: Fixemos um triângulo $\triangle ABC$ e acoplemos a cada lado um triângulo equilátero, como indica a figura 1. Então é também equilátero o novo triângulo que criamos unindo os centros dos três triângulos equiláteros.

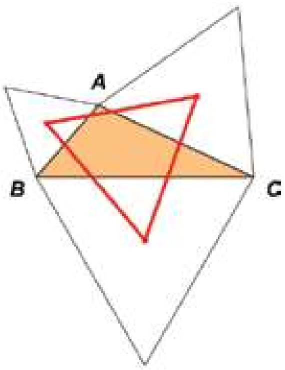

Figura 1.

A primeira impressão face a este enunciado, com ingredientes tão simétricos, é a de que ele deve ser simples de demonstrar. A nossa intuição diz-nos ainda que talvez ele seja um caso particular de um resultado mais geral. São precisamente estes dois aspetos que discutiremos de seguida.

Comecemos por apresentar uma demonstração deste resultado, usando a notação da figura 2.

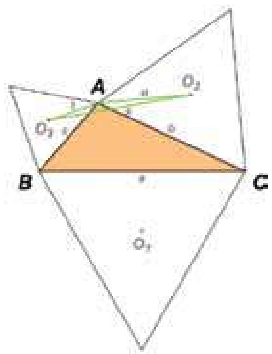

Figura 2.

Designemos por $\angle A$, $\angle B$ e $\angle C$ os ângulos do triângulo $\triangle ABC$ nos vértices A, B e C, respetivamente, e por $a = |BC|$, $b = |CA|$ e $c = |AB|$ os comprimentos dos lados opostos aos vértices A, B e C, por esta ordem. Juntemos um triângulo equilátero a cada lado, e denotemos por O_1, O_2 e O_3 os respetivos baricentros (pontos de interseção das medianas). Trata-se de provar que o triângulo $\triangle O_1O_2O_3$ é equilátero. Sejam

$$s = |O_2O_3|, \qquad t = |AO_3| \qquad \text{e} \qquad u = |AO_2|.$$

Pela lei dos cossenos,

$$s^2 = u^2 + t^2 - 2\,u\,t\,\cos\left(\angle A + 60^\circ\right).$$

Além disso, o baricentro de um triângulo trissecta cada mediana e, num triângulo equilátero de lado ℓ, estas medem $\frac{\sqrt{3}}{2}\,\ell$. Logo,

$$t = \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,c\right) \qquad \text{e} \qquad u = \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,b\right).$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} 3\,s^2 &= b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos(\angle A + 60^\circ) \\ &= b^2 + c^2 - \,b\,c\,\cos(\angle A) + \sqrt{3}\,b\,c\,\operatorname{sen}(\angle A). \ (1) \end{aligned}$$

Tendo em conta que, no triângulo $\triangle ABC$, se tem, pela lei dos cossenos,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos(\angle A)$$

e, pela lei dos senos,

$$\text{área}\,(\triangle ABC) = \frac{b\,c\,\operatorname{sen}(\angle A)}{2},$$

a igualdade (1) pode reescrever-se

$$3\,s^2 = \frac{1}{2}\,(a^2 + b^2 + c^2) + 2\,\sqrt{3}\,\left(\text{área}\,(\triangle ABC)\right).$$

Note-se agora que esta expressão é simétrica relativamente aos valores de a, b e c, o que implica que o triângulo $\triangle O_1O_2O_3$ é equilátero, e que isso não depende do triângulo inicial $\triangle ABC$.

A construção do novo triângulo pode também ser feita colando um triângulo equilátero a cada lado do triângulo $\triangle ABC$ mas pelo interior deste triângulo, como ilustra a figura 3.

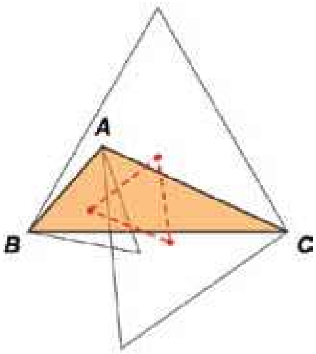

Figura 3.

O resultado é ainda um triângulo equilátero cujos vértices são as imagens de O_1, O_2 e O_3 por reflexões nas linhas BC, AC e AB, respetivamente; além disso, os dois triângulos equiláteros novos e o triângulo $\triangle ABC$ têm o mesmo baricentro (cf. [2]). Cálculos análogos aos anteriores indicam que o comprimento S do lado deste novo triângulo verifica a igualdade

$$\begin{aligned} 3\,S^2 &= b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos(\angle A - 60^\circ) \\ &= \frac{1}{2}\,(a^2 + b^2 + c^2) - 2\,\sqrt{3}\,\left(\text{área}\,(\triangle ABC)\right). \end{aligned}$$

Em particular, este triângulo novo construído para dentro degenera num ponto se e só se $\triangle ABC$ é equilátero[1]. Como a área de um triângulo equilátero de lado ℓ é $\frac{\sqrt{3}}{4}\,\ell^2$, é imediato deduzir das igualdades anteriores que a diferença entre as áreas dos dois triângulos equiláteros novos, o exterior e o interior, é igual a

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\,s^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}\,S^2 = \text{área}\,(\triangle ABC).$$

Se tivéssemos unido externamente cada lado do triângulo $\triangle ABC$ à base de um triângulo isósceles com ângulos na base iguais a 30º, e escolhido como vértices do novo triângulo os ápices dos triângulos isósceles, obteríamos também um triângulo equilátero. De facto, aqueles ápices são os centros de três triângulos equiláteros com a mesma base dos isósceles e, portanto, a construção é implicitamente a que vimos nos parágrafos anteriores. Contudo, os baricentros dos três triângulos isósceles são vértices de um triângulo que não é sequer isósceles (veja-se a figura 4).

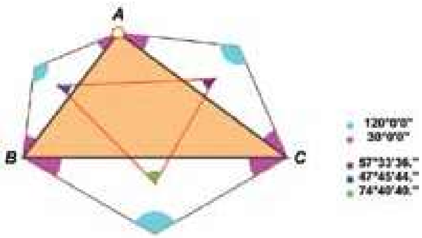

Figura 4.

Esta observação indica que, se os triângulos não são equiláteros, nem sempre a construção anterior gera um triângulo que herda a forma dos triângulos acoplados. E há uma dificuldade adicional: temos vários modos de acoplar um triângulo não equilátero ao lado de outro triângulo, e isso tem certamente impacto na forma do triângulo novo. O que nos leva a perguntar:

a) Há alguma posição de acoplamento que garanta que, usando triângulos semelhantes mas não equiláteros, o triângulo novo é semelhante aos acoplados?

b) O que se obtém se, em vez dos baricentros, usarmos outros pontos como vértices do novo triângulo?

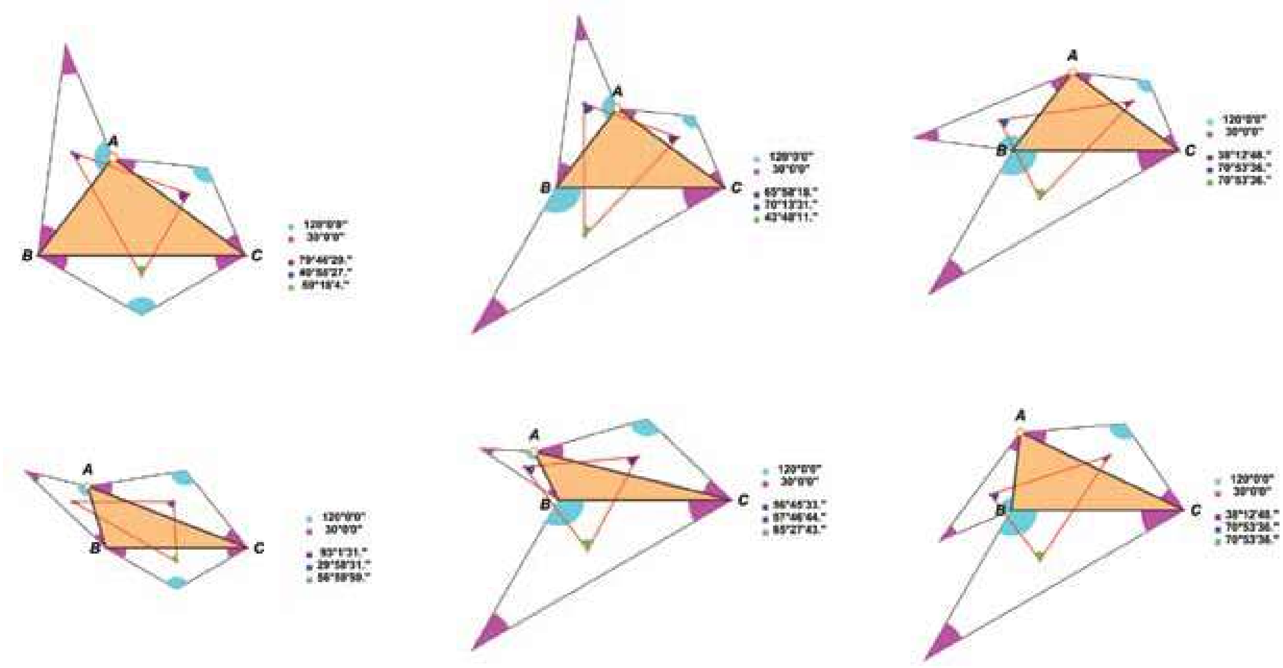

Figura 5.

c) Como varia o triângulo novo quando mudamos $\triangle ABC$?

Podemos experimentar estas variantes no módulo interativo disponível em [1]. A figura 5 mostra o efeito no triângulo novo de mudanças no triângulo $\triangle ABC$ e na posição dos triângulos adicionados quando usamos os baricentros de triângulos isósceles semelhantes, com ângulos na base iguais a 30º, acoplados exteriormente a $\triangle ABC$. Note-se que, para algumas configurações, mesmo quando o triângulo novo não é semelhante aos que se colaram, a sua forma não varia com o triângulo $\triangle ABC$; mas isso não é válido para todas as posições dos triângulos que se juntam. Na figura 6 pode ver-se uma configuração degenerada.

Com mais algumas experiências como as exemplificadas nestas figuras, convencemo-nos de que é possível unir externamente triângulos semelhantes a um qualquer triângulo $\triangle ABC$ de modo a garantir que os respetivos circuncentros formam um triângulo semelhante aos acoplados. Uma demonstração desta propriedade pode ler-se em [2]. Este enunciado admite algumas generalizações (cf. [3]) e, em particular, é válido

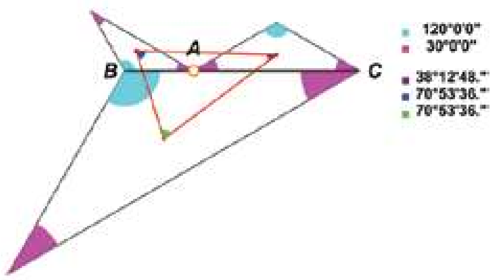

Figura 6.

o seguinte: fixados dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle PQR$ e um ponto X interior a $\triangle PQR$, existe um modo de acoplar externamente a $\triangle ABC$ três triângulos semelhantes a $\triangle PQR$ tal que X e os outros dois pontos nestes triângulos na mesma posição relativa de X criam um triângulo que é semelhante a $\triangle PQR$. Na figura 7 está representada

[1] De facto, se $b = c$ e $\angle A = 60°$, então $S = b^2 + c^2 - 2\,b\,c = (b-c)^2 = 0$. E, reciprocamente, se $S = 0$, então $b^2 + c^2 = 2\,b\,c\,\cos(\angle A - 60°) \leqslant 2\,b\,c$, logo $(b-c)^2 \leqslant 0$, o que só é possível se $b = c$; neste caso, $\cos(\angle A - 60°) = 1$, e portanto devemos ter $\angle A = 60°$, uma vez que $0 \leqslant \angle A - 60° \leqslant 120°$.

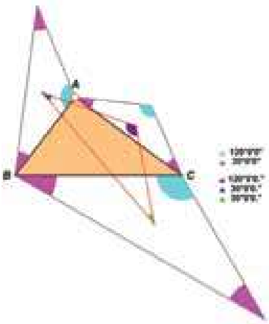

Figura 7.

uma tal configuração (observe-se que a soma dos ângulos nos vértices livres é de 180º) para o triângulo isósceles e o respetivo baricentro usados na figura 5.

O módulo interativo de [1] permite analisar a variação das áreas, dos ângulos e da posição dos triângulos novos quando se mudam os ingredientes desta construção (o triângulo $\triangle ABC$, a forma dos triângulos semelhantes que se unem a $\triangle ABC$, a posição em que essa ligação é feita e os pontos que se escolhem para vértices do novo triângulo), sugerindo resultados gerais que o leitor é convidado a demonstrar.

REFERÊNCIAS

[1] *https://www.atractor.pt/mat/triangulosNapoleao*

[2] H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer. *Geometry Revisited*. New Mathematical Library, Vol. 19, MAA, 1967.

[3] J. F. Rigby. *Napoleon Revisited*. Journal of Geometry, Vol. 33, 1988, pp. 129-146.