AS FORMAS DOS NÚMEROS

Daniela Tavares
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
danielatavares97@hotmail.com

Os números têm formas. Bem, pelo menos alguns. Por exemplo, temos números triangulares, quadrados, retangulares, pentagonais, entre outros. Aos números tais que conseguimos formar um polígono regular com o seu respetivo número de pontos dá-se o nome de *números poligonais*.

Figura 1. 3, 4 e 5 são números poligonais.

O estudo destes números começou ainda muito antes de Pitágoras[1]. Sabe-se que os babilónios, os indianos e os gregos já teriam demonstrado todos, independentemente o tão conhecido, e assim nomeado, Teorema de Pitágoras, agora tradicionalmente estudado no Ensino Básico. Para ele, o conceito de número poligonal proveio do conceito de gnomo. Um *gnomo* é uma figura composta pela justaposição de figuras com a mesma forma tal que, ao se justapor uma nova dessas figuras, se obtém uma figura com a mesma forma do gnomo original. A imagem seguinte é o exemplo de um gnomo, visto que quando acrescentamos cada conjunto de pontos continuamos a ter um quadrado, mas maior.[2]

Quando nos pomos sobre os ombros de gigantes, o resultado pode ser incrivelmente belo. É o caso do Teorema dos Números Pentagonais de Euler, que é o teorema a que pretendemos chegar. Para tal, começamos por falar da história dos números com formas, descobertos por Pitágoras (ou talvez não...).

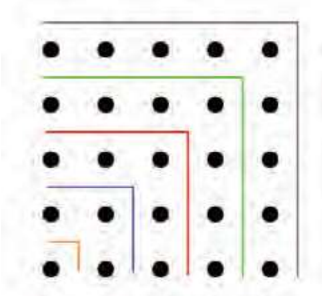
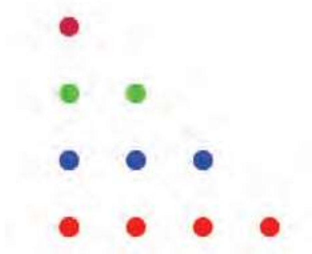


Figura 2. Gnomo.

Este é um argumento geométrico interessante para demonstrar uma propriedade que todos aqueles que conhecem o método de indução já provaram. A propriedade é:

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2.$$

Os números triangulares são um exemplo de números poligonais, sendo o n-ésimo número triangular, T_n, dado por $\frac{n(n+1)}{2}$, como se vê pela justificação dada na figura abaixo – que corresponde à soma dos n primeiros números naturais.



De acordo com este facto, podemos concluir que:

$$\begin{aligned}T_n+T_n &= (1+2+3+\cdots+(n-1)+n)+(n+(n-1)+\cdots+2+1)\\ &= (1+n)+(2+n-1)+\cdots+(n-1+2)+(n+1)\\ &= (n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1).\end{aligned}$$

Logo,

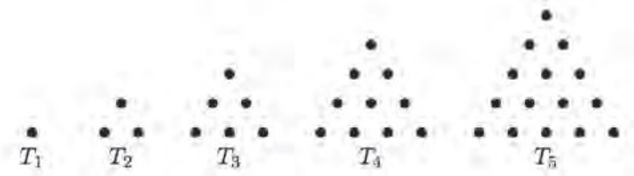
$$2T_n=n(n+1) \iff T_n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Assim, os cinco primeiros números triangulares são 1, 3, 6, 10 e 15.

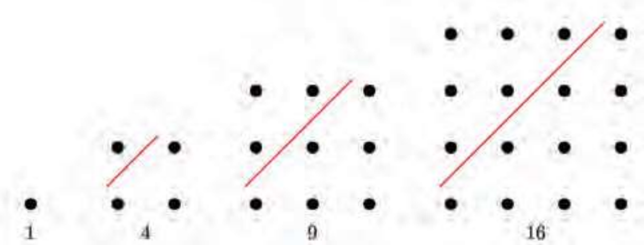
---

[1] *https://www.britannica.com/science/Pythagorean-theorem, https://www.ima.umn.edu/press-room/mumford-and-pythagoras-theorem.*

[2] Para mais informações sobre a história dos números poligonais ver *https://core.ac.uk/download/pdf/77977823.pdf* e *http://math.bu.edu/people/kost/teaching/MA341/PolyNums.pdf.*



Existe uma relação interessante entre os números triangulares e os números quadrados. De facto, qualquer quadrado é a soma de dois números triangulares consecutivos, ou seja, $Q_n = T_n + T_{n-1}$, em que Q_n é o n-ésimo número quadrado. Esta igualdade também é conhecida como fórmula de Theon e é bastante intuitiva de uma perspetiva geométrica, como se mostra na figura abaixo.



Além disso, não é difícil ver que $n^2 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}$.

A partir dos números quadrados e triangulares é possível obter os números pentagonais, que são dados pela fórmula $P_n = \frac{n(3n-1)}{2}$. Isto é possível, uma vez que $P_n = Q_n + T_{n-1}$. Uma prova geométrica deste facto é dada abaixo:

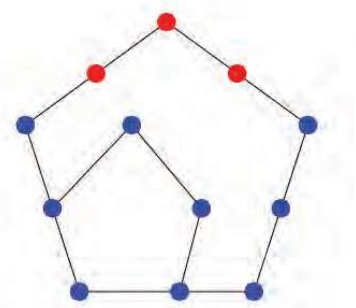
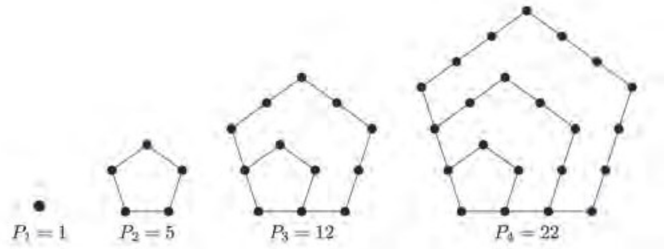


Figura 3. Ilustração da identidade $P_n = Q_n + T_{n-1}$, para o caso $n = 3$.

Assim, conforme anunciado,

$$\mathrm{P}_n = Q_n + T_{n-1} = n^2 + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{3n^2-n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}.$$

Deste modo, os primeiros cinco números pentagonais são 1, 5, 12, 22 e 35.



Fermat chegou a conjeturar o número de números poligonais necessário para obter um qualquer número natural. No entanto, foi Cauchy, em 1813, que provou esta conjetura. Hoje, o teorema é designado por alguns por teorema dos números poligonais de Fermat e por outros por teorema dos números poligonais de Cauchy. Este teorema afirma que todo o número natural é a soma de, no máximo, n números n-gonais. Gauss provou o caso particular de todo o número natural poder ser expresso como a soma de três números triangulares. Por exemplo, 13 = 6 + 6 + 1.

Outro caso também bastante importante historicamente é o teorema dos quatro quadrados de Lagrange, provado em 1770, que afirma que todos os números naturais, maiores do que zero, podem ser obtidos pela soma de, no máximo, quatro números quadrados. Por exemplo, 10 = 4 + 4 + 1 + 1.

Outro resultado interessante é o de todo o número inteiro positivo poder ser escrito como a soma de dois quadrados e de um número triangular. E mais, todo o número inteiro positivo pode ser escrito como a soma de dois números triangulares com um número quadrado [3]. Por exemplo, 5 = 1 + 1 + 3 = 3 + 1 + 1.

Para se compreender melhor a importância dos números poligonais, vamos definir o conceito de partição.

Uma *partição* de um número inteiro (positivo), n, é uma representação de n como uma soma, não ordenada, de inteiros positivos. Seja $p(n)$ o número de partições de um dado n natural, definindo-se também que $p(0) = 1$. Tem-se que, por exemplo, $p(5) = 7$, visto que 5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1, não havendo qualquer outra forma de decompor $n = 5$ numa soma de números naturais. Cada elemento de cada partição é designado por *parte*. Por exemplo, 4 e 1 são as partes da partição 4+1.

Ainda podemos ir mais longe neste conceito de partição. Definimos $p_d(n)$ como o número de partições de n com partes distintas. Então, $p_d(n) = p_e(n) + p_o(n)$, em que $p_e(n)$ é o número de partições cujo número de partes é par e $p_o(n)$ é o número de partições cujo número de partes é ímpar. Por exemplo, nas diferentes partições de 5, as partições 4 + 1 e 3 + 2 têm duas partes distintas, pelo que $p_e(5) = 2$. Como $p_d(5)$ é 3 – visto que 5, 4 + 1 e 3 + 2 são as únicas partições de 5 com partes distintas – resulta que $p_o(5) = 1$.

Mas por que se definiram estes conceitos todos? Será que há alguma relação entre as partições e algum dos números já vistos? A resposta é sim. Euler descobriu o que chamamos hoje de Teorema Pentagonal, cujo enunciado é

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(x^{P_n} + x^{P'_n}),$$

sendo que, para todo o n, se tem $P'_n = P_n + n$. Deste modo, para exprimir $\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)$ como uma soma, basta utilizar os números P_n. E o que é este P_n? Isso mesmo, é a sequência dos números pentagonais! Assim,

$$\mathrm{P'}_n = \frac{3n^2+n}{2} \text{ e } P_n = \frac{3n^2-n}{2}.$$

Estes números são chamados de números pentagonais generalizados. Consequentemente,

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(x^{P_n} + x^{P'_n}),$$

é equivalente a ter-se

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(x^{\frac{3n^2+n}{2}} + x^{\frac{3n^2-n}{2}}). \qquad (1)$$

Ora, se expandirmos o produtório, obtemos $1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \cdots$. O que dizer sobre os coeficientes? Nesta série de potências, o coeficiente de x^k é:

$$\begin{cases} 0, & \text{se } k \text{ não é um número pentagonal generalizado,} \\ (-1)^n, & \text{caso contrário, onde } n \text{ é tal que } k = \frac{3n^2 \pm n}{2}. \end{cases}$$

Por outro lado, o coeficiente de x^k é dado por $p_e(k) - p_o(k)$.[3] Mas sendo assim, então podemos concluir que

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(p_e(n) - p_o(n))x^n.$$

Concluimos finalmente que

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(p_e(n) - p_o(n))x^n. \\ &= 1 - x - x^2 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \cdots\end{aligned}$$

REFERÊNCIAS

[1] Cañadas, Agustin; *On Sums of Figurate Numbers by Using Techniques of Poset Representation Theory*

[2] Cañadas, Augustin; *On Sums of Three Squares*

[3] Deza, Elena; Deza, Michel; *Figurate Numbers. https://arxiv.org/pdf/0812.0540.pdf*

[4] Bressoud, David M.; *Proofs and Confirmations (The Story of the Alternating Sign Matrix Conjecture)*

[5] Hardy, G.H.; Wright, E.M.; Heath-Brown, D.R.; Silverman, J.H.; *An Introduction to the Theory of Numbers*

[6] S. Wilf, Herbert; *Lectures on Interger Partitions*

[7] Cranston, Dan; *Euler's Pentagonal Number Theorem*

[8] University of St-Andrews, *MT5821 Advanced Combinatorics, Lecture 8*

SOBRE A AUTORA

Daniela Tavares é aluna da Licenciatura em Matemática na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Tem especial interesse em Teoria de Números e em História da Matemática.