Euromilhões, probabilidades, valores médios e medianas

Dinis Pestana
DEIO, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

As regras do EUROMILHÕES são simples: cada aposta consiste na marcação de 5 números (de 1 a 50) e duas estrelas (de 1 a 9), e custa 2 Euros. São premiadas as apostas que prognostiquem correctamente pelo menos três dos valores sorteados, sendo pelo menos um deles um "número". Mais precisamente, os prémios são definidos como se indica no quadro que se segue, no qual se indicam também probabilidades e números médios de apostas por prémio.

	números	estrelas	probabilidade	nº médio de apostas por prémio	nº de prémios na 1a semana (Portugal)
1º prémio	5	2	0.000000013110394	76 275 360	0
2º prémio	5	1	0.000000183545512	5 448 240	0
3º prémio	5	0	0.000000275318268	3 632 160	2
4º prémio	4	2	0.000002949838585	339 002	54
5º prémio	4	1	0.000041297740188	24 214	782
6º prémio	4	0	0.000061946610281	16 143	1 196
7º prémio	3	2	0.000129792897733	7 705	2 736
8º prémio	3	1	0.001817100568257	550	34 915
9º prémio	2	2	0.001860364867501	538	38 727
10º prémio	3	0	0.002725650852385	367	56 457
11º prémio	1	2	0.009766915554381	102	198 885
12º prémio	2	1	0.026045108145016	38	490 426
			0.042451599048500	24	

Na última linha indica-se que a probabilidade de uma aposta ser ganhadora não atinge os 5%, ou seja, em termos de valores esperados, em média uma em cada 24 apostas é premiada.

As receitas da Santa Casa de Misericórdia de Lisboa (SCML) são 2 Euros por aposta, destinando-se ao pagamento dos prémios 50% daquela verba. A SCML tem um lucro ligeiramente inferior a 50% (porque tem que constituir um fundo, até ao limite de 1.5%, que faça face a possíveis reclamações procedentes e renovação de material).

Fica-se assim com a ideia de que o valor de retorno é 50%, por outras palavras que o prémio esperado por aposta é 1 Euro.

Mas, de facto, 16% da verba destina-se a um "fundo de reserva para incrementar o valor do 1º prémio", e consequentemente apenas 34% do valor das receitas é redistribuído como prémios. Assim, o valor esperado por aposta desce nessas semanas para 68 cêntimos (para um investimento de 2 Euros).

Apesar disso, é obviamente um jogo tentador. As apostas premiadas recebem um prémio superior ao valor investido (no primeiro sorteio em Portugal, o 12º prémio foi 8,90 Euros, cerca de 4,5 vezes o preço da aposta), o primeiro prémio é fantástico, dá para tirar uma tribo inteira da miséria, e ninguém desdenharia de receber mesmo o 4º prémio. Para todos aqueles para quem 2 Euros podem ser prescindíveis, é uma forma barata de adquirir sonhos loucos e fantasias das mil e uma noites - e ainda sobra para os dias. Desse ponto de vista, espero não me esquecer de entregar a minha aposta em cada semana, de agora até morrer, e mesmo depois, se possível.

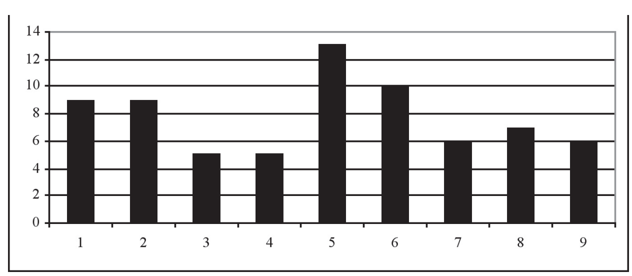
Mas o apostador tem que estar preparado para não ganhar. De facto, a probabilidade de ganhar, mesmo o mais baixo dos prémios, é pequena, e a probabilidade de ganhar um dos prémios que enche os olhos (1º a 3º) é baixíssima: menos do que uma em cada 2 milhões de apostas será contemplada com um desses prémios bem altos. Sendo a probabilidade de ganhar o primeiro prémio ínfima, vai haver decerto um grande número de semanas em que ficará por atribuir.

Um consolo a tirar daí é que raramente o prémio será repartido, se o leitor tiver a sorte de prognosticar correctamente os cinco números e as duas estrelas vai ficar rico como o lendário Creso. Um elemento a ter em conta enquanto estiver a sonhar, até ao sorteio, mas lembre-se que o mais certo é acordar sem nada na mão: Mais de 95% dos apostadores apenas vão ganhar dinheiro fora do bolso, pois em termos médios apenas uma em cada 24 apostas vai ter algum retorno (e, das apostas premiadas, cerca de 61% — quase dois terços — fica-se pelo 12º prémio).

A nossa atitude perante o jogo não é muito racional. Há pessoas adversas ao risco, e pessoas que têm uma verdadeira vertigem de jogar. De um modo geral, um jogo honesto (valor esperado = valor investido) não interessa senão como passatempo, porque não pode enriquecer ninguém. Os jogos mais tentadores são aqueles em que o retorno esperado é bastante inferior ao investido, mas em compensação se pode ficar podre de rico. Não importa que a probabilidade de isso acontecer seja tão baixa como um abismo, porque enquanto o pau vai e volta podemos viver de ilusões. E, sobretudo, a assimetria pérfida nas probabilidades dos prémios leva a que o preço das ilusões esteja ao alcance de (quase) todas as bolsas. Ainda por cima recebe-se o prémio sem ter que se esportular logo uma grossa maquia em impostos!

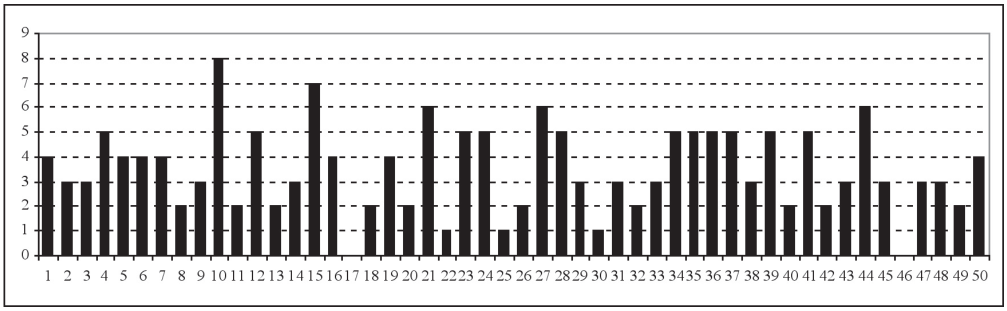
Parte da irracionalidade da nossa atitude perante o jogo revela-se na nossa curiosidade sobre os "números que saíram mais vezes". Nas 35 semanas anteriores à sua introdução em Portugal, as frequências das estrelas e dos números sorteados são as que constam dos gráficos que se seguem:

Estrelas



O cinco está farto de sair, e o 3 e o 4 têm andado subrepresentados; como referência de comparação, note que a frequência esperada de cada estrela naquelas 35 semanas é 2x35/9=7.78.

Números



Apenas o 17 e o 46 nunca saíram nas referidas semanas. A frequência esperada de cada número nessas 35 semanas é 5x35/50=3.5; o 10 e o 15 têm primado pela vontade em aparecer, e o 21, o 27 e o 44 também não se têm feito rogados.

Mas, afinal, as extracções de semana para semana são independentes, o facto de um número ter surgido mais ou menos vezes nas semanas anteriores não o torna nem mais nem menos provável do que qualquer outro. Temos, por outro lado, uma percepção das estruturas do acaso que nos leva a pensar que é anormal quer uma ausência persistente quer uma aparente tendência para ser frequentemente sorteado, e acreditamos que nos sucessivos concursos se vai reequilibrando a frequência com que cada número ou estrela é sorteado.

Mas, repetimos, a convicção de que a informação de semanas anteriores é relevante é completamente ilusória. Como é ilusória a ideia de que há "chaves" mais prováveis do que outras. Claro que é muito mais provável uma chave em que a soma dos números ronde 127 (a "soma esperada" é, naturalmente, $\frac{1+50}{2}\times 5 = 127.5$) do que a chave (única) em que a soma é 15 ou 240. Mas a probabilidade de saírem os números 8, 16, 24, 32, 47, que somam 127 — e que ainda por cima estão tão bem arrumadinhos, um em cada uma das dezenas possíveis!) é exactamente a mesma que a de sair 1, 2, 3, 4, 5, ou 46, 47, 48, 49, 50.

A ilusão de que há "chaves" mais favoráveis é não só antiga como persistente. De facto, não é difícil argumentar que no totoloto é muito menos provável que saiam 6 números consecutivos (há apenas 44 sequências favoráveis nas $\binom{49}{6}$ possíveis) do que 6 números salteados. Mas, em compensação, a probabilidade de ganhar o 1º prémio com uma aposta com aquelas características, condicionalmente a ter saído uma chave de 6 números consecutivos, é $\frac{1}{44}$. Por outras palavras, a probabilidade de ganhar com uma aposta em 6 números consecutivos é, pela regra da cadeia P(A|B)×P(B), $\frac{1}{44}\times\frac{44}{\binom{49}{6}}=\frac{1}{\binom{49}{6}}$, como a de qualquer outra aposta.

Algumas das dificuldades em lidar com probabilidades — como no exemplo acima — advêm da confusão entre três noções intimamente aparentadas, mas de facto distintas: probabilidade, probabilidade condicional, e probabilidade conjunta. Na linguagem formal da Matemática as confusões são facilmente evitáveis, mas na linguagem corrente é muitas vezes obscuro o que está em causa, com resultados desastrados na avaliação das incertezas e dos riscos que lhes estão associados.

Outra fonte de falsas intuições é a dualidade entre as noções de probabilidade e de valor esperado (que são iguais nas variáveis de Bernoulli, o que nos leva a usar o caminho fácil de usar "variáveis indicatrizes" para calcular valores médios que são probabilidades ... — uma facilidade que pode ser a matriz de desastres se se confundirem os dois conceitos noutras circunstâncias). Logo nos inícios da Probabilidade, em 1654, Pascal raciocinou em termos de valores médios para solucionar o problema da partilha das apostas colocado pelo cavaleiro de Meré. E em 1657 o

De Ratiociniis in Ludo Aleae[1] de Christian Huyghens usa de forma muito sofisticada o conceito de valor médio.

Enquanto a probabilidade está sempre entre 0 e 1, há variáveis aleatórias que têm valor médio infinito, o que tem consequências contraintuitivas interessantes. Nos ínicios dos século XVIII, Daniel Bernoulli publicou nos *Anais da Academia de S. Petersburgo* um resultado que, por ser contra-intuitivo, é conhecido por "paradoxo de S. Petersburgo".

A questão é: quanto deve um indivíduo pagar à banca para jogar um jogo em que se procede a sucessivos lançamentos de uma moeda equilibrada, até sair pela primeira vez F (face). Se isto acontecer no k-ésimo lançamento, a banca paga ao apostador 2^k unidades monetárias.

A variável aleatória X= *ganho do apostador* é então

$$X=\begin{cases} 2^k & k=1,2,\ldots \\ P_k=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^k & \end{cases}$$

e consequentemente

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}2^k\left(\frac{1}{2}\right)^k=1+1+1\ldots=\infty,$$

pelo que não há valor finito de entrada que equilibre este jogo.

O resultado é contraintuitivo, pois se a moeda é equilibrada, por muito persistente que seja o azar (da banca, neste caso, se o apostador for suficientemente rico para continuar a dobrar a parada), é inverosímil que ao fim de uma dezena de jogos não tenha saído F!

Buffon, Cramér e outros tentaram contornar o paradoxo considerando que não há recursos infinitos. Atente-se, no entanto, que o paradoxo não é tão paradoxal quanto parece à primeira vista:

Nenhum casino aceita um jogo com a regra "o dobro ou nada", há sempre fiscais a vigiar se algum jogador está a seguir a estratégia de em cada jogada duplicar o montante que aposta, pois é proibido dobrar a parada mais do que um número limitado de vezes (em termos práticos, a banca não aceita apostas superiores a um determinado montante).

1 Acessível em edição recente (*Traité de la Manière de Raisonner dans les Jeux du Hasard*) como apêndice à edição de *L'Art des Conjectures* de Jacques Bernoulli, Editions Jacques Gabay, Paris.

De facto, se não houvesse essa regra, um jogador suficientemente rico ganhava sempre, o que levava o casino à ruína. Bastava começar por apostar uma unidade, se perdesse apostar duas, se voltasse a perder apostar quatro, etc. Então, se ganhasse, finalmente, na k-ésima jogada, a sucessão de jogos teria como resultado para o jogador
$-1, -2, -4, -8, \ldots, -2^{k-2}, +2^{k-1}$
(no k-ésimo jogo recebe 2^k, mas tinha apostado 2^{k-1}, e portanto o lucro que obtém nesse jogo é $2^k-2^{k-1}=2^{k-1}$). O ganho total é portanto $2^{k-1}-\sum_{j=0}^{k-2}2^j=2^{k-1}-\frac{1-2^{k-1}}{1-2}=+1$.

Se o jogador recomeçasse imparavelmente esta estratégia (ou se infinitos jogadores sem limitação de recursos a seguissem), o casino perdia, devagar mas consistentemente

$$1+1+\ldots+\ldots=\infty$$

inexoravelmente ficaria arruinado.

Outras ilusões persistentes têm a sua origem numa confusão entre média e mediana, originada porventura do facto de nos modelos simétricos — como o "normal" — mediana e valor médio coincidirem (no caso de existir valor médio, claro). Esta ilusão é tão antiga que vem já discutida num dos primeiros grandes livros de Probabilidade, *The Doctrine of Chances* (título que se poderia traduzir por *Teorização do Acaso*), publicado por Abraham de Moivre em 1716.

Na época havia um jogo sob licença régia, conhecido por *Royal Oak Lottery*, muito menos sofisticado do que o Euromilhões. Havia esferas numeradas de 1 a 32, e depois de os apostadores arriscarem o seu dinheiro no número que os tentava o "Master of the Game" extraía uma esfera, e pagava 28 vezes o valor da aposta aos apostadores que tivessem acertado. Como a probabilidade de ganhar é, neste jogo, $\frac{1}{32}$, o retorno esperado por cada unidade monetária é $28\times\frac{1}{32}=0{,}875$. Repare-se que com um investimento mínimo o estado arrecadava, numa noite em que fossem apostadas 10 000 libras, cerca de 1 250 libras, nada mau (mas, evidentemente, muito longe do que actualmente os jogos oficiais arrecadam).

Os jogadores achavam este lucro excessivo, e que um retorno de 28 vezes o valor apostado com tão baixa probabilidade de ganhar era demasiado escasso. O Mestre do Jogo, quando as críticas subiam de tom, recordava que estava autorizado a apostar, como representante do rei, que qualquer número que um dos seus críticos escolhesse saía com certeza pelo menos uma vez em cada 22 jogos consecutivos.

Isto é completamente contraintuitivo! O número esperado de jogos até sair um número fixo é naturalmente 32, visto que há igual probabilidade de sair qualquer das esferas numeradas de 1 a 32. Este resultado contraintuitivo deve-se, de facto, à independência entre jogos consecutivos:

A probabilidade de um número escolhido — para fixar ideias, e sem qualquer perda de generalidade, suponha-se que o crítico protestante escolhia o 17 — **não** sair em cada um dos jogos é $\frac{31}{32}$ — por outras palavras, a probabilidade de o 17 surgir logo no primeiro jogo é apenas cerca de 3%. Devido à independência, a probabilidade de o 17 **não** sair nos dois primeiros jogos é $\left(\frac{31}{32}\right)^2 = 93{,}85\%$, a probabilidade de **não** surgir nos três primeiros jogos é $\left(\frac{31}{32}\right)^3 = 90{,}91\%$. Na tabela que se segue indicam-se as probabilidades para 32 jogos consecutivos.

nº jogo	probabilidade de não sair	probabilidade de sair
1	0.968750	0.031250
2	0.938477	0.061523
3	0.909149	0.090851
4	0.880738	0.119262
5	0.853215	0.146785
6	0.826552	0.173448
7	0.800722	0.199278
8	0.775700	0.224300
9	0.751459	0.248541
10	0.727976	0.272024
11	0.705227	0.294773
12	0.683189	0.316811
13	0.661839	0.338161
14	0.641156	0.358844
15	0.621120	0.378880
16	0.601710	0.398290
17	0.582907	0.417093
18	0.564691	0.435309
19	0.547044	0.452956
20	0.529949	0.470051
21	0.513388	0.486612
22	0.497345	0.502655
23	0.481803	0.518197
24	0.466747	0.533253
25	0.452161	0.547839
26	0.438031	0.561969
27	0.424342	0.575658
28	0.411082	0.588918
29	0.398235	0.601765
30	0.385790	0.614210
31	0.373734	0.626266
32	0.362055	0.637945

Mas, como se vê na tabela acima, a probabilidade de o 17 não surgir em nenhum dos 22 jogos consecutivos, $\left(\frac{31}{32}\right)^{22} \approx 49{,}7\%$, já é inferior a 1/2, e o Mestre do Jogo em geral ganhava a aposta. Segundo Abraham de Moivre reporta, isso deixava os jogadores abalados e confusos (não percebiam que enquanto eles reclamavam em termos de valor médio, o Mestre do Jogo os rebatia em termos da mediana), e continuavam a jogar ... e a perder.

Note-se que a probabilidade de o 17 ter saído nas primeiras 32 jogadas (32 é o número médio de jogadas para ocorrer qualquer dos 32 números possíveis) é ainda inferior a 2/3.

Os jogos dão lucros enormes a quem os controla. Por isso mesmo, a maior parte dos apostadores está a perder dinheiro, e no entanto continuam a jogar porque

a) a quantidade de dinheiro que perdem é, aposta a aposta, suportável;

b) o jogo autopublicita-se através de grandes prémios que contemplam um número (muito escasso) de sortudos, incentivando os outros a continuar a arriscar.

Ser contemplado com um prémio grande é um acontecimento raro, muito raro, mas pode acontecer a qualquer, e é o sonho que mantém o jogo a funcionar.

E, convenhamos, também alguma racionalidade: é muito mais provável enriquecer a jogar ou a roubar do que a trabalhar. Qual é a opção que fica para todos nós, que somos honestos?

Agradecimentos: Agradeço ao *referee* a indicação de lapsos, omissões e gralhas que eu dificilmente detectaria sem a sua ajuda.