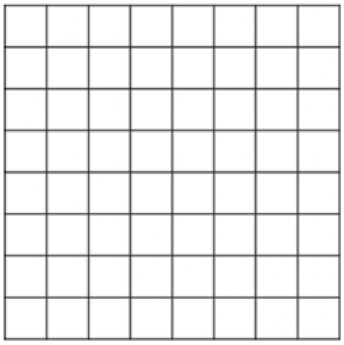
Jorge Nuno Silva
Universidade
de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu

TABULEIRO RECREATIVO

O jogo do xadrez, as suas peças e o seu tabuleiro são fontes inesgotáveis de problemas recreativos. De entre as múltiplas fontes bibliográficas nesta matéria, as questões das olimpíadas sobressaem, pela diversidade e pela qualidade dos desafios. Para este texto, inspirámo-nos (mais uma vez!), nas Olimpíadas de Moscovo do começo do atual milénio.

Hoje propomos somente dois desafios.

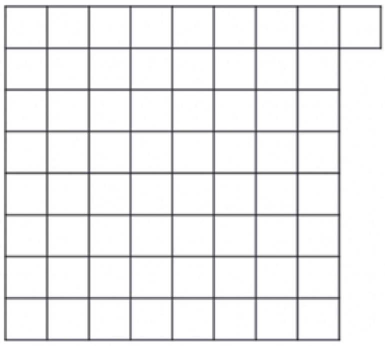
1. Considere o tabuleiro usual, 8×8:



Um dominó é uma peça que cobre duas casas ortogonalmente adjacentes.

Imagine 32 dominós colocados sobre o tabuleiro, sem sobreposições. Como cada um cobre duas casas, o tabuleiro ficará completamente coberto pelas 32 peças.

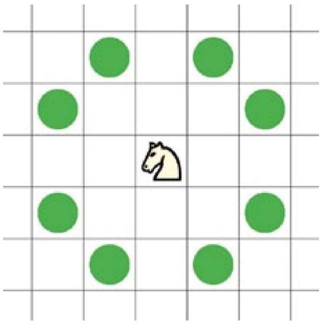
Acrescente-se agora uma casa ao tabuleiro, como ilustrado a seguir.



Podemos levantar um dominó e colocá-lo sobre duas casas descobertas adjacentes e repetir esta operação à vontade. O desafio consiste em mostrar que podemos, se assim o desejarmos, terminar com todos os dominós na posição horizontal.

2. No jogo do xadrez, o cavalo move-se de forma peculiar (até porque salta sobre as outras peças).

A figura ilustra o movimento da peça. Se introduzíssemos coordenadas nas linhas e colunas do tabuleiro, de forma natural, poderíamos dizer que um cavalo colocado na casa (a, b) pode saltar para qualquer uma das seguintes (desde que não salte do tabuleiro para fora, claro!): $(a \pm 1, b + 2)$, $(a \pm 1, b - 2)$, $(a \pm 2, b + 1)$, $(a \pm 2, b - 1)$.



Qual é o maior número de cavalos que consegue colocar num tabuleiro 5×5, de forma a que cada um ataque exatamente dois dos outros? Exiba uma configuração que atinja esse valor máximo.

Sobre as questões propostas no número anterior, algumas indicações de resolução:

1. Sejam A e B dois pontos da circunferência unitária que definem uma corda de comprimento superior a $\sqrt{2}$. Aplique a Lei dos Cossenos ao triângulo definido por esses pontos e pelo centro da circunferência. Conclua que o ângulo ao centro é superior a $\pi/2$, pelo que $n \leqslant 3$. Como temos o caso do triângulo equilátero, $n = 3$.

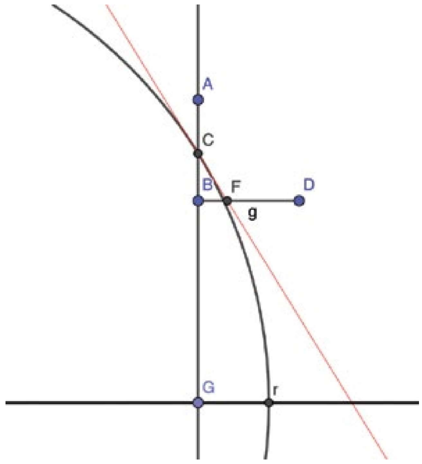
2. Seja P_n um polígono convexo com n lados e seja p um ponto no seu interior. Sejam $a_1, \ldots, a_n$ as distâncias de p aos lados de P_n. Consideremos vetores unitários ortogonais aos lados de P_n, $u_1, \ldots, u_n$. Seja q outro ponto no interior do polígono. A distância de q ao lado i de P_n é $a_i + (u_i, \overline{pq})$, onde $(\cdot, \cdot)$ representa o produto interno. A soma das distâncias de q aos lados de P_n, $D(q)$, é então

$$D(q) = D(p) + \sum_{i=1}^{n} (u_i, \overline{pq})$$

pelo que a condição é $\sum_{i=1}^{n} u_i = 0$.

3. Mostre que se os comprimentos a e b não são realizados, então $a + b$ também não. Particularize para $1/n$ e use indução.

4. Dada a circunferência centrada na origem e raio r (arbitrariamente grande), considere a seguinte construção, onde $|OG| = \lfloor r \rfloor$, $AG \perp OG$, $BD \perp AG$, AF é tangente à circunferência em C, B e A são pontos com coordenadas inteiras consecutivos, assim como B e D.



Prove que $|BF| \leqslant |BD| = 1$ e, usando a semelhança entre os triângulos CBF e OCG, que

$$\delta(r) \leqslant |BC| \leqslant \frac{|BC|}{|BF|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{r}} = o(1) \quad (r \to \infty).$$