Eduardo Marques de Sá
Universidade de Coimbra
emsa@mat.uc.pt

UMA CARDIÓIDE NO CORAÇÃO DO DELFOS

Tendo o seu banho baptismal ocorrido em Dezembro de 2001, o Projecto Delfos celebra os seus 20 anos de idade. A efeméride será recordada, durante este ano, com uma referência no logotipo. E também neste Canto Délfico, onde analisamos alguns aspectos matemáticos desse logo, da sua origem, do seu significado e da sua execução técnica.

O LIVRO E O CORAÇÃO

Em 2012, tinha já o Delfos dez anos, resolvemos renovar o logotipo. Foram mantidas as letras "δelfos", tendo-se apenas mudado a forma do livro, que sempre fora rudimentar, estilizado em poucos traços. O livro tornou-se mais airoso, como mostra a figura 1a, e passou a ter um coração, símbolo do amor ao estudo, à matemática e ao Delfos. Além disso, a estranha cúspide na aurícula direita, um sistema de coordenadas cartesianas e uma interrogação num ponto crítico de abcissa máxima sinalizam um ser matemático. A parte folclórica da adivinha era: *uma coisa plana, redonda, que tem uma cúspide e parece um coração, que coisa é?* Dito assim, poucos matemáticos falharão a resposta. Os elementos desse logotipo sugeriam o que sempre fomos: um projecto de escola onde a paixão pela Matemática e a resolução de problemas são o que nos move. O problema proposto só se revela plenamente quando o livro se abre, como na figura figura 1b, mostrando uma das criaturas mais queridas do nosso zoo: a cardióide. A questão matemática que esse logotipo colocava era a que aqui dirigimos ao leitor para que a resolva:

> *Qual a cota do ponto de abcissa máxima desta cardióide, sabendo que a dita abcissa é 1, que a origem é o ponto de cota mínima e Oy é o seu eixo de simetria?*

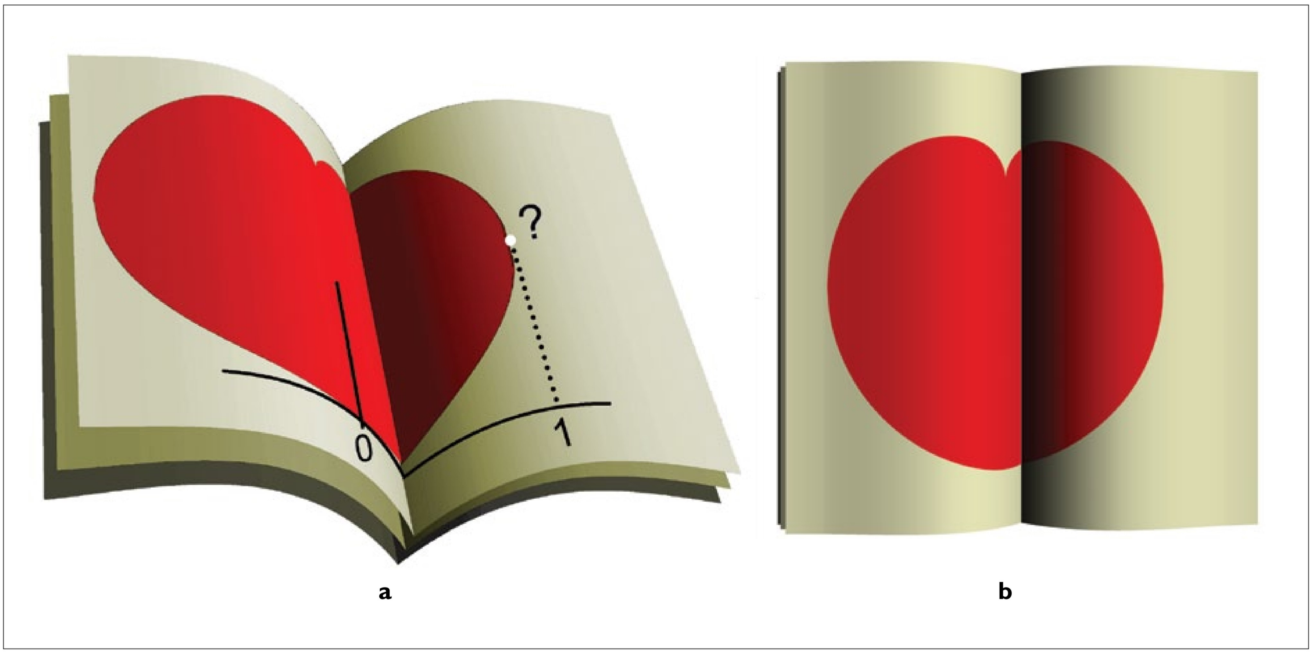

Figura 1.

Pouco depois, o logotipo simplificou-se para o que mostra a primeira figura deste artigo, sem "ano 20". O livro fechou-se um pouco mais, criando um desfiladeiro profundo onde a cardióide escondeu a sua cúspide. O tal problema já lá não está, mas o coração não esmoreceu.

SOBREPOSIÇÃO DE PRISMAS

A imagem do livro com cardióide pode gerar-se no programa *Mathematica 7*, usando meios relativamente rudimentares que vamos descrever. Cada folha do livro representa uma superfície cilíndrica de geratrizes paralelas ao eixo *Oy*, como mostra a figura 3, tendo por directriz uma curva suave escolhida a gosto. No entanto, em programas digitais, não há curvas nem superfícies suaves; os elementos básicos são segmentos de recta, polígonos, poliedros, etc., que o programador combina conforme o resultado pretendido. Na verdade, essas combinações geométricas apresentam-se no concreto como conjuntos finitos de *pixels*, que parecem mas não são o que idealizamos. Para dar um exemplo, um fino segmento de recta *quase paralelo* ao bordo inferior dum ecrã não é um conjunto de *pixels* totalmente alinhados...

O livro com cardióide consiste numa sobreposição de (partes de) oito prismas, seis para as folhas e dois, a vermelho, para a cardióide. O número de faces de cada um é à nossa escolha. As peças prismáticas e o método de as combinar são bem visíveis se, como na figura 2, escolhermos um pequeno número de faces para cada prisma. Estas são rectângulos, trapézios e (dois) triângulos, todos com a mesma "largura" em cada prisma. A adopção dum elevado número de faces é que confere a aparência de suavidade das superfícies. Cada prisma do logotipo tem mais de 150 faces; a curva cardióide é, por isso, um polígono com mais de 600 vértices.

Figura 2.

EMPENO DAS FOLHAS

O livro foi colocado num referencial cartesiano tridimensional, *Oxyz*, como na figura 3, que mostra as duas páginas superiores do livro, sobre as quais se instala a cardióide. As duas páginas são, inicialmente, rectângulos (a cinzento claro, na figura) assentes no plano *Oxy*, uma no semi-plano $x < 0$ e outra no semiplano $x > 0$, coladas ao longo do eixo *Oy*. Esse eixo irá funcionar como lombada do livro. Em seguida, as folhas são deformadas, transformando-se em superfícies cilíndricas de geratrizes paralelas a *Oy*. O cilindro do lado direito tem por directriz a curva a vermelho que, no plano *Oxz* é o gráfico duma função $z = f(x)$, escolhida *ad hoc*; o cilindro à esquerda terá outra directriz adequada que se pretenda. Os dois cilindros articulam-se segundo *Oy*, podendo cada um rodar em torno desse eixo, por forma a fechar ou a abrir o livro conforme se pretenda. Essas rotações conseguem-se mediante uma instrução primitiva muito simples do *Mathematica*.

O problema técnico que vamos estudar é o seguinte: dado um ponto *P*, que se imagina materialmente preso à folha ainda não deformada, no plano *Oxy*, qual a posição, *S*, que *P* vai ocupar na folha deformada?

Claro que *P* e *S* têm a mesma coordenada *y*, pelo que não perdemos generalidade supondo que $P = (c, 0, 0)$, com $c \geqslant 0$. Sendo assim, $S = \big(x, 0, f(x)\big)$, onde *x* é o número determinado pela condição geométrica óbvia: *c é igual ao comprimento do arco* $\widehat{OS}$. Designemos por $\mathsf{C}(x)$ o comprimento de $\widehat{OS}$. Vimos que $S = \big(x, 0, f(x)\big)$ é a imagem do ponto $P = (\mathsf{C}(x), 0, 0)$ na folha deformada. Portanto, o nosso problema fica resolvido se conseguirmos determinar a função $\mathsf{C}(x)$ *e a sua inversa*.

Em geral, $\mathsf{C}(x)$ não é uma função elementar, ou seja, uma combinação de funções nossas conhecidas – polinomiais, trigonométricas, exponenciais e suas inversas. Mas podemos calcular um valor aproximado, tão próximo quanto queiramos, de $\mathsf{C}(x)$ para cada valor fixado de *x*. O modo de resolver este problema numérico por meios elementares consiste em substituir o gráfico de *f* por uma poligonal inscrita, que servirá de avatar da curva. Pormenorizando, admitamos que $[0, a]$ é o domínio das abcissas dos pontos *S* do gráfico a vermelho, na figura 3; dividamos $[0, a]$ em *n* partes iguais, por introdução dos números $x_i = \frac{a}{n}\, i$, para $i = 0, 1, \ldots, n$. A cada *i* corresponde um ponto da curva, $S_i = (x_i, 0, f(x_i))$; a poligonal com vértices S_i, denotada $[S_0, S_1, \ldots, S_n]$, constitui uma aproximação da nossa curva, tanto mais próxima quanto maior for *n*. Pelo teorema de Pitágoras, cada lado $[S_{i-1}, S_i]$ da poligonal tem comprimento $\sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta f_i^2}$, onde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e $\Delta f_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$. Portanto, para cada vértice S_k é fácil calcular o comprimento, denotado c_k, da poligonal $[S_0, S_1, \ldots, S_k]$; a fórmula é

$$c_k = \textstyle\sum_{i=1}^{k} \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta f_i^2} = \sum_{i=1}^{k} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f_i}{\Delta x_i}\right)^2}\, \Delta x_i. \quad (1)$$

Calculando todos os c_k, obtemos uma tabela de duas linhas e *n* colunas,

$$\begin{array}{|cccc|} \hline x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \hline c_1 & c_2 & \ldots & c_n \\ \hline \end{array}\,, \quad (2)$$

onde, na *k*-ésima coluna, c_k é um valor aproximado de $\mathsf{C}(x_k)$, e x_k é um valor aproximado de $\mathsf{C}^{-1}(c_k)$. O problema fica *aproximadamente* resolvido, para os valores tabelados. Se, dado um $P = (c, 0, 0)$, o comprimento *c* não ocorre na segunda linha da tabela, podemos usar um método de interpolação para determinar *S*.

Resumindo, a projecção $P \rightsquigarrow S$ executa-se assim. Primeiro, escolhe-se *n* e coloca-se a tabela (2) na memória do *Mathematica*. Sendo $P = (c, y, 0)$, procura-se, na tabela, o *k* tal que $c_k \leqslant c < c_{k+1}$; toma-se para projecção o ponto $S = (x, y, f(x))$, onde *x* se obtém da tabela, no intervalo $[x_k, x_{k+1}[$, por interpolação. No caso de se optar pela interpolação linear, a fórmula será

$$x = x_k + (c - c_k)(x_{k+1} - x_k)/(c_{k+1} - c_k).$$

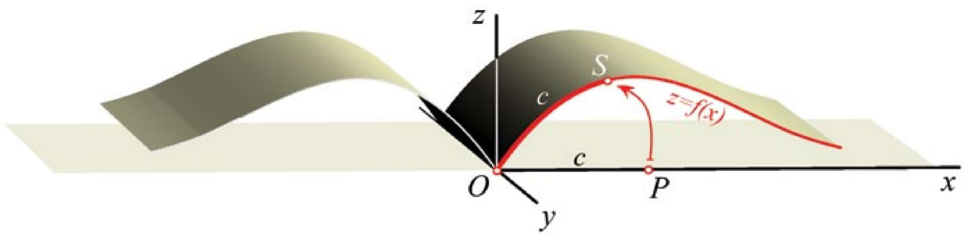

Figura 3.

Para conseguir melhores aproximações, aumenta-se o valor de n. No caso da nossa folha empenada, basta $n = 200$ para se obter um bom resultado, em particular uma imagem convincente da cardióide plana projectada na superfície cilíndrica.

Para terminar, destaque-se a elementaridade de todo o processo até agora descrito, não sendo preciso saber muita matemática para o conceber e executar. Mas a elementaridade dos conceitos usados leva a uma folha de cálculo muito extensa. Um conhecimento mais profundo ajuda muito na procura de métodos mais expeditos. Tome-se como exemplo a questão crucial de programar a projecção do plano na superfície cilíndrica. Quando se estuda cálculo integral, aprendem-se fórmulas para calcular comprimentos, áreas e volumes. No caso em que $S = (X, y, f(X))$, a fórmula do comprimento de $\widehat{OS}$ é

$$\mathsf{C}(X) = \int_0^X \sqrt{1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2}\, dx.$$

A fórmula é *exacta*.[1] Mas $\mathsf{C}(X)$ não é uma função elementar conhecida, pois $f(x)$ é polinómio de grau 6. Acontece que o *Mathematica* tem uma subrotina, isto é, um programa pronto a usar, que faz cálculos de forma quase instantânea, custando apenas meia linha de código. Ei-lo:

```
NIntegrate[Sqrt[1 + f'[x]^2], {x, 0, X}]
```

Vale mesmo a pena saber mais matemática. Neste caso, serviu apenas para despachar um simples logotipo. Claro que o assunto é sério, "o que há é pouca gente para dar por isso"... Mas noutros mais sérios que a este mundo mais interessam, o mesmo saber pode ser precioso.

O autor escreve segundo a ortografia antiga.

[1] Ela obtém-se por passagem ao limite de (1), quando $k=n$ e $n \to \infty$.