O ENSINO DA MATEMÁTICA ESCOLAR AOS FUTUROS PROFESSORES*

Hung-Hsi Wu
Universidade da Califórnia
wu@berkeley.edu

*Tradução por Fernando Pestana da Costa, do artigo "Teaching School Mathematics to Prospective Teachers", publicado, em dezembro de 2021, no N.º 22 do *European Mathematical Society Magazine*. A *Gazeta de Matemática* agradece ao autor e à EMS a autorização para a publicação desta tradução.

Que matemática deve ser ensinada no Ensino Superior aos estudantes que irão ser professores nos ensinos Básico e Secundário é uma questão que, sendo recorrente, merece, ainda assim, um olhar atento dos matemáticos docentes e responsáveis dos cursos superiores das universidades e dos institutos politécnicos encarregues desta importante tarefa. A questão é tanto mais relevante quanto, muitas vezes, não é encarada com a devida seriedade porque a matemática envolvida é considerada "elementar".
Sendo claro que um professor deve ter, além de uma compreensão profunda dos assuntos que está a ensinar, um conhecimento apreciavelmente mais vasto, acontece que, dada a natureza elementar de muitos assuntos que o futuro professor terá de ensinar, há a tendência para, não poucas vezes, em unidades curriculares de matemática dedicadas à formação de professores, a temática ser centrada em aspetos puramente didáticos ou, então, em aspetos matemáticos mais abstratos e essencialmente irrelevantes para os futuros professores, em vez de se debruçar sobre os (supostamente elementares) aspetos matemáticos dos tópicos tratados. Que isto é um erro e que o Ensino Superior deve dar a devida atenção à "Matemática Escolar", assumindo-a como uma disciplina matemática autónoma que deve ser devidamente estruturada, seriamente encarada e cuidadosamente ensinada aos futuros professores, é tema do artigo de Hung-Hsi Wu.
O autor é bem conhecido da comunidade matemática portuguesa, tendo, por várias vezes, sido orador nos encontros nacionais da Sociedade Portuguesa de Matemática sobre temas de ensino da matemática e formação de professores, e tendo a tradução e a publicação em Portugal de um dos seus livros sido também promovidas pela Sociedade.
O presente artigo, tradução do original publicado no European Mathematical Society Magazine, é uma importante contribuição para a discussão deste tópico e, pensamos, será útil também no contexto português.

Fernando Pestana da Costa
(Prof. catedrático da Univ. Aberta; ex-presidente da SPM)

O tipo de matemática que devemos ensinar a prospetivos professores de matemática dos ensinos Básico e Secundário tem sido um problema longamente debatido em educação matemática. Neste artigo defendemos que o que lhes devemos ensinar é aquilo de que eles precisarão para o seu trabalho: a matemática escolar.

1. INTRODUÇÃO

Uma boa educação em matemática escolar requer que os professores sejam conhecedores de Matemática. No fim de contas, não se pode ensinar o que não se sabe. No entanto, pelo menos nos Estados Unidos, ainda não estamos muito seguros sobre que tipo de matemática devemos ensinar aos futuros professores para os tornar conhecedores (cf. [12]). Num bem conhecido artigo de 1990, [1], Deborah Ball reportou o seu estudo sobre o conhecimento de conteúdos de 252 candidatos a futuros professores (217 a professores do Ensino Básico e 35 do Ensino Secundário) em cinco universidades. O estudo focou-se num tópico: a divisão de frações. Perante a divisão $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ e quatro problemas de palavras, apenas 30% foram capazes de selecionar o problema que era corretamente representado por esta divisão. Num estudo com menos intervenientes, pediu-se a 35 dos 217 professores (25 do Básico e 10 do Secundário) para criarem um problema de palavras que representasse corretamente aquela divisão. Apenas quatro dos 35 (ou seja, 11%) conseguiram dar uma resposta satisfatória, e todos eles eram professores do Secundário. As entrevistas (separadas) de Deborah Ball, acerca do mesmo tópico da divisão de frações, com estudantes de matemática do Ensino Superior que não planeavam ir para o ensino não produziu resultados melhores. A conclusão a que a autora chegou foi que a preparação dos prospetivos professores precisava urgentemente de uma séria reavaliação.

Naturalmente que a pesquisa sobre a melhor forma de ajudar os prospetivos professores a adquirirem a necessária compreensão da matemática para ensinar é anterior ao estudo de Ball, datando, pelo menos, do início do século XX. Nos dias do declínio da "Matemática Moderna", nos anos 1960, E. G. Begle também refletia sobre a possível correlação entre o conhecimento dos assuntos por parte dos professores e os êxitos dos seus estudantes. No seu estudo [2], de 1972, sobre 308 professores de Álgebra no Ensino Secundário, ele não encontrou evidência de que a extensão do treino em matemática dos professores resultasse em melhores resultados dos alunos. Esta conclusão foi também confirmada mais tarde, em 1979, em [3].

As décadas que passaram desde os estudos de Begle e Ball contribuíram para clarificar o fenómeno por eles descoberto. Iremos, primeiro, analisar os dados de Ball sobre $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$, e, depois, colocar esses dados na perspetiva adequada ao aceitar o facto de que a *Matemática Escolar* é uma disciplina distinta da matemática que ensinamos nas universidades.

2. A DIVISÃO DE FRAÇÕES: DUAS VISÕES

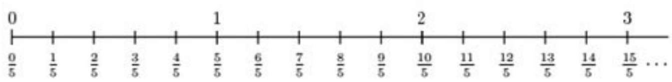
Iremos abordar o tópico da divisão de frações usando duas perspetivas. Primeiro, iremos descrever o que os alunos do Ensino Básico necessitam de saber para responder às perguntas de Deborah Ball e, depois, o que é que estudantes universitários podem aprender sobre divisão de frações numa disciplina de Álgebra. Por limitações de espaço, iremos apenas concentrar-nos nas diferenças *matemáticas* críticas entre os dois, deixando de parte as ramificações pedagógicas.

Quando o assunto da divisão de frações é abordado no Ensino Básico os estudantes enfrentam um verdadeiro desafio conceptual: o conceito de fração envolve um nível de abstração superior ao de qualquer outra coisa que encontraram até essa altura e a divisão é a mais elusiva das quatro operações aritméticas definidas sobre frações. Os estudantes não conseguem superar qualquer destes obstáculos se não lhes for dito *exatamente* o que é que cada um destes conceitos significa. Como disse Kyle Kirkman, uma professora do Ensino Básico do Arizona,

> "Tenho aprendido que é crítico possuir definições matemáticas precisas. Se a precisão está ausente, os estudantes colmatarão qualquer elemento vago ou em falta na definição com o que quer que seja que esteja presente no seu paradigma e que pareça adaptar-se à ideia. Nem toda a matemática tem uma natureza intuitiva, pelo que isto pode originar conclusões erróneas." [12, Secção 4.2.4].

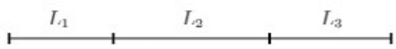
Infelizmente, acontece que, usualmente, em matemática escolar, as frações são explicadas aos estudantes em termos de metáforas vagas, sem dar uma definição precisa, ou, pelo menos, não uma que os estudantes possam usar para raciocinar sobre as quatro operações quando aplicadas às frações. Temos, primeiro, de descrever um modo de remediar esta deplorável situação. Definiremos uma fração em termos que são sentidos como "reais" e "tangíveis" para estudantes do Ensino Básico. A definição comummente aceite atualmente para tal fim é a de fração como um ponto na chamada *reta numérica* (ver secções 12.1 e 12.2 de [9], ou pp. 1-18 de [10]), da maneira que se segue. Assumimos que conseguimos decidir quando é que dois segmentos (i.e., intervalos fechados) têm, ou não, o mesmo comprimento. Uma **reta numérica** é uma linha horizontal na qual os números inteiros positivos foram identificados como pontos tais que os números 1, 2, 3, ... são colocados sucessivamente para a direita de 0 e os segmentos [0,1], [1,2], [2,3], ..., *têm, todos, comprimento igual*:

As frações com denominador igual a (por exemplo) 5 consistem nos números inteiros positivos juntamente com os pontos obtidos pela divisão de cada um dos segmentos [0,1], [1,2], [2,3], ..., em cinco **partes de igual comprimento.**



Chamamos a esta sucessão a **sucessão dos quintos**. Do mesmo modo, para cada número inteiro positivo n podemos introduzir a **sucessão dos *n*-ésimos**. (Observe a semelhança entre a sucessão dos n-ésimos, para cada n, e a sucessão dos inteiros positivos.) As **frações** são, por definição, a totalidade de todos os pontos nas sucessões dos n-ésimos, para todos os números inteiros positivos n.

Introduzimos, a seguir, o conceito de *comprimento* para certos segmentos. Por definição, o **comprimento** do segmento $[0, \frac{a}{b}]$ (onde $\frac{a}{b}$ é uma fração) é igual a $\frac{a}{b}$. Portanto, um segmento com o mesmo comprimento de $[0, \frac{a}{b}]$ também tem comprimento igual a $\frac{a}{b}$. Para dar uso a esta definição introduzimos o conceito de **concatenação** de uma coleção de segmentos - digamos, L_1, L_2 e L_3 - como sendo o segmento formado colocando estes segmentos juntos, com o final de um coincidente com o início do outro:



Segue-se daqui que o comprimento da concatenação de três das partes obtidas quando [0,1], é dividido, digamos, em sete partes iguais é $\frac{3}{7}$, porque esse segmento tem o mesmo comprimento de $[0, \frac{3}{7}]$.

Como a divisão está baseada na multiplicação, prosseguiremos diretamente para a **multiplicação de frações** sem discutir previamente as *frações equivalentes* ou a *adição de frações*. Por definição, $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$ é o comprimento da concatenação de duas das partes que se obtêm quando o segmento $[0, \frac{3}{4}]$ é dividido em cinco partes iguais. A multiplicação de duas frações em geral é definida de modo análogo (veja-se, por exemplo, Secção 1.5 de [10] ou Secção 1.4 de [13]). É um facto não trivial (para estudantes do Ensino Básico) provar a seguinte **fórmula do produto**:

$$\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{5 \times 4} \tag{1}$$

Veja-se, por exemplo, o Teorema 1.5 na página 60 de [10][1].

Esta definição de multiplicação de frações não surgiu do nada. Se, na definição de $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$, substituirmos a fração $\frac{3}{4}$ por 1 $(= \frac{1}{1})$, então a definição de $\frac{2}{5} \times 1$ ("o comprimento total de duas das partes que se obtêm quando [0, 1] é dividida em cinco partes iguais") é exatamente a definição, acima, de $\frac{2}{5}$, pelo que, não surpreendentemente, $\frac{2}{5} \times 1 = \frac{2}{5}$. Além disto, se considerarmos o produto de números inteiros positivos, digamos, 2×3, podemos também encará-lo como a multiplicação das frações $\frac{2}{1}$ e $\frac{3}{1}$. Então, a definição de multiplicação de frações diz-nos que este produto é o comprimento total de duas das partes que se obtêm quando o segmento [0,3] é dividido numa única parte, isto é, quando se considera o segmento [0,3] inteiro. Por outras palavras, o produto 2×3, quer quando considerado como o produto de dois *números inteiros positivos* quer como o produto de duas *frações*, é apenas $3 + 3$. Deste modo, vemos que a definição da multiplicação de frações é uma extensão muito natural de conceitos familiares.

Como é que este conceito de multiplicação se relaciona com o mundo real? Para alunos do Ensino Básico isto é uma preocupação importante, como o problema seguinte mostra.

Exemplo 1. Sabendo que $4\frac{2}{3}$ baldes de água são necessários para encher um tanque de água, qual é o volume do tanque, se a capacidade de cada balde for de 5,5 litros?

Solução. É importante começarmos por compreender os dados do problema. Como, por definição, $4\frac{2}{3} = 4 + \frac{2}{3}$ o tanque contém quatro baldes e $\frac{2}{3}$ de um balde de água. O volume total de quatro baldes é claramente $4 \times 5\frac{1}{2}$ litros. Agora os estudantes têm de compreender (e o professor deverá explicar) que "$\frac{2}{3}$ de $5\frac{1}{2}$ litros" significa que é o volume de "duas partes quando $5\frac{1}{2}$ litros é dividido em três partes de igual volume". *Pela nossa definição de multiplicação de frações,* isto é precisamente $\frac{2}{3}$ de $5\frac{1}{2}$ litros na reta numérica em que "1" é interpretado como significando "1 litro". Pela propriedade distributiva, o volume do tanque é

$$\left(4 \times 5\,\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{3} \times 5\,\frac{1}{2}\right) \;=\; 4\,\frac{2}{3} \times 5.,5 \;\text{ litros.}$$

Portanto, "$4\frac{2}{3}$ *de* 5,5 litros" é igual a "$(4\frac{2}{3} \times 5,5)$ litros".

Incidentalmente, isto *explica* porque é que quando os livros de texto não definem multiplicação de frações, dão a regra (para memorizar) que a palavra "de" significa "multiplicar".

Passemos, agora, à divisão. Devemos, primeiro, rever o conceito de *divisão inteira* (veja-se pp.127-130 de [9]). Observe-se que, ao passo que podemos somar ou multiplicar *quaisquer* dois números inteiros positivos, não podemos subtraí-los nem dividi-los. Por exemplo, no contexto de números inteiros positivos, a subtração $3 - 7$ não é permitida, nem a divisão $21 \div 5$. Examinemos esta última: no contexto dos inteiros positivos, podemos escrever $21 \div 7$ (respetivamente $15 \div 3$) apenas porque sabemos antecipadamente que 21 (respetivamente 15) é um múltiplo *inteiro* de 7 (respetivamente 3). Por exemplo, a definição de $21 \div 7$ é:

$$21 \div 7 \;= (\text{número inteiro positivo } k \text{ tal que } k \times 7 = 21). \tag{2}$$

[1] Ou as páginas 298-300 de [9]. *(N. do T.).*

É por isto que $21 \div 7 = 3$. A definição deixa perfeitamente claro que, sem a garantia *a priori* de que 21 é um múltiplo de 7, seria impossível definir o *inteiro positivo* $21 \div 7$. De modo equivalente, se não soubermos que 21 pode ser particionado em três grupos de 7, então não poderemos falar sobre $21 \div 7$. Se os estudantes acharem (2) confuso, será bom lembrar que (2) não é diferente da definição de subtração:

$$21 - 7 \;=\; \big(\text{número inteiro positivo } \ell \text{ tal que } \ell + 7 = 21\big). \tag{3}$$

A importância desta revisão prende-se com o facto de a divisão de inteiros servir de modelo para a divisão de frações, uma vez que inteiros são também frações (veja pp. 316-322 de [9]). Portanto, de acordo com (2), a divisão $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ ($1\frac{3}{4}$ é apenas $\frac{7}{4}$) não fará sentido a menos que $1\frac{3}{4}$ seja *múltiplo fracionário* de $\frac{1}{2}$ no sentido de que $1\frac{3}{4} = \frac{m}{n} \times \frac{1}{2}$ para alguma fração $\frac{m}{n}$. (Esta fração $\frac{m}{n}$ é única; veja o lema na página 319 de [9] ou o lema 1.7 na página 75 de [10].) *Assumindo que existe uma tal fração* $\frac{m}{n}$, então podemos definir $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ exatamente do mesmo modo que em (2):

$$1\,\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} \;=\; \left(\text{a fração } \tfrac{m}{n} \text{ tal que } \tfrac{m}{n} \times \tfrac{1}{2} = 1\,\tfrac{3}{4}\right). \tag{4}$$

Veja a página 321 de [9] ou a página 75 de [10].

Surpreendentemente, ao contrário do que acontece no caso de números inteiros, acontece que tal fração $\frac{m}{n}$ no membro direito de (4) pode sempre ser encontrada do seguinte modo:

$$\begin{aligned} 1\,\frac{3}{4} &= 1 \times 1\,\frac{3}{4} = \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{1}\right) \times 1\,\frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{1} \times 1\,\frac{3}{4}\right) \quad \text{(propriedade associativa da multiplicação)} \\ &= \left(\frac{2}{1} \times 1\,\frac{3}{4}\right) \times \frac{1}{2} \quad \text{(propriedade comutativa da multiplicação).} \end{aligned} \tag{5}$$

De (5) vemos que se fizermos $\frac{m}{n} = \frac{2}{1} \times 1\,\frac{3}{4}$ então $1\,\frac{3}{4} = \frac{m}{n} \times \frac{1}{2}$ e (4) permite-nos concluir que

$$1\,\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} \;=\; \frac{2}{1} \times 1\,\frac{3}{4}. \tag{6}$$

Claro que isto é a **regra de multiplicação pela fração inversa** para a divisão de frações. Verifica-se que este raciocínio é perfeitamente geral.

Damos agora um problema de palavras do artigo de Ball ([1]) cuja solução requer a utilização da divisão de frações $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ *e também explicamos como é que ele surge.*

Exemplo 2. Quantos copos de água são necessários para encher um jarro com um volume de $1\frac{3}{4}$ litros sabendo que cada copo tem uma capacidade de $\frac{1}{2}$ litro?

Solução. Seja $\frac{m}{n}$ o número de copos de água necessários para encher o jarro. Usando o raciocínio apresentado no Exemplo 1 acerca do volume de água no tanque, vemos que

$$\frac{m}{n} \times \frac{1}{2} \;=\; 1\,\frac{3}{4}.$$

Pela definição de divisão de frações, isto significa que

$$\frac{m}{n} \;=\; \mathbf{1\,\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}} \;=\; \frac{2}{1} \times 1\,\frac{3}{4} \;=\; 3\,\frac{1}{2},$$

onde a última igualdade se obtém por um cálculo rotineiro.

Chegados a esta altura, mostrámos qual o mínimo conhecimento matemático que um professor deve ter para ensinar corretamente a divisão de frações aos seus alunos. Salientamos mais uma vez que este conhecimento mínimo *não* é o que, tipicamente, os alunos do Ensino Básico são ensinados nas escolas dos Estados Unidos. Seja como for, é agora tempo para discutir a outra preocupação no artigo de Ball de 1990, nomeadamente sobre a razão de os estudantes do Ensino Superior de matemática também poderem não ter esse conhecimento básico. Na discussão que se segue apenas poderemos abordar muito superficialmente este assunto.

Uma unidade curricular universitária[2] de Álgebra Abstrata que inclui um modo matematicamente correto de definir frações é, essencialmente, a primeira introdução de um estudante à matemática abstrata. O principal objetivo de uma tal unidade curricular é o de guiar os primeiros passos do estudante no ambiente do que é a chamada *matemática abstrata*. Isto explica porque, nessas disciplinas, a ênfase é colocada em definições corretas, nas demonstrações, e, pela utilização da lógica, na redução de todos os fenómenos matemáticos complexos aos mínimos essenciais. Para o caso que estamos a considerar, coloquemo-nos na situação em que os estudantes estão já na posse dos inteiros, que serão designados por $\mathbb{Z}$, e ter-se-ão apercebido de que o maior defeito de $\mathbb{Z}$, de um ponto de vista abstrato, é que, com exceção de 1 e de -1, mais nenhum inteiro não nulo tem um *inverso multiplicativo*, i.e., dado um inteiro z, $z \neq 1$ ou -1, não existe qualquer inteiro z' tal que $zz' = z'z = 1$. A maneira de eliminar este defeito consiste em expandir $\mathbb{Z}$ incluindo os desejados inversos multiplicativos e formando, assim, o corpo dos quocientes $\mathbb{Q}$.

É claro que este $\mathbb{Q}$ é aquilo a que chamamos **números racionais** (frações positivas e negativas), mas, de um ponto de vista abstrato, não podemos apenas juntar a $\mathbb{Z}$ os novos números $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{3}$, etc., e declarar: "Aqui está!" Afinal, *o que é que são estes novos números e como é que os adicionamos e multiplicamos?* Queremos que os estudantes aprendam a fazer coisas semelhantes nos chamados *domínios de integridade,* sistematicamente e de uma vez por todas, e a maneira de fazer isso é formar o conjunto de todos os pares ordenados de inteiros, $\{\langle u, v\rangle\}$, (onde u e v são inteiros) e introduzir neste conjunto uma *relação de equivalência* (essencialmente declarando válido o algoritmo da multiplicação cruzada) e, depois, declarando que $\mathbb{Q}$ é, por definição, o conjunto das *classes de equivalência.* Após isto podemos mostrar que cada inteiro u em $\mathbb{Z}$ pode ser identificado com a classe de equivalência contendo $\langle u, 1\rangle$, e podemos também escrever a classe de equivalência contendo $\langle u, v\rangle$ como $\frac{u}{v}$ de modo a alinhar a nova notação com a antiga. Em particular, isto quer dizer que $\frac{u}{1}$ é identificado com o inteiro u, para qualquer u.

Para principiantes, apenas a familiarização com esta construção geral e ficar confortável com a ideia de que cada "número" em $\mathbb{Q}$ é agora uma classe de equivalência (contendo um número infinito de elementos) é já um esforço formidável. Mas há mais. Até esta altura apenas temos um conjunto maior, $\mathbb{Q}$, contendo $\mathbb{Z}$, mas ainda não sabemos como fazer aritmética em $\mathbb{Q}$, i.e., dados dois elementos arbitrários de $\mathbb{Q}$ ainda não sabemos como adicioná-los ou multiplicá-los. Consequentemente, o próximo passo é o de *definir* as regras para a adição e para a multiplicação de elementos de $\mathbb{Q}$ (que são classes de equivalência) com o objetivo de mostrar que $\mathbb{Q}$ é um objeto abstrato chamado *corpo*, o que significa, em particular, que cada elemento não nulo de $\mathbb{Q}$, z, terá um inverso multiplicativo z^{-1}, i.e., $zz^{-1} = z^{-1}z = 1$. Eis as definições relevantes: para u, v, s, t em $\mathbb{Z}$ com $v \neq 0$ e $t \neq 0$,

$$\frac{u}{v} + \frac{s}{t} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{ut + sv}{vt} \tag{7}$$

$$\frac{u}{v} \times \frac{s}{t} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{us}{vt}. \tag{8}$$

É importante sublinhar a notável mudança de perspetiva que acabou de ter lugar. Em matemática escolar as frações são consideradas como sendo uma parte da Natureza que os estudantes devem conhecer, e a ideia de que duas frações podem ser multiplicadas é um dado adquirido. O que necessita de explicação é como é que o produto de duas frações está relacionado com fenómenos que nos rodeiam no dia a dia e porque é que a fórmula do produto (1) está correta. Em contraste com isto, a matemática abstrata prossegue de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Q}$ encarando apenas os inteiros como sendo conhecidos, pelo que, agora, adicionar e multiplicar os *desconhecidos* números racionais não inteiros é algo totalmente em branco que aguarda ser estabelecido; tal é feito definindo judiciosamente o que estas operações devem ser. A estrutura interna de $\mathbb{Q}$ é, aqui, a única preocupação, e não como é que $\frac{u}{v} \times \frac{s}{t}$ está relacionado com algum fenómeno do dia a dia. Em particular, enquanto (1) é um teorema da matemática escolar, a mesma expressão (8) é uma mera *definição.*

Agora podemos perceber por que razão, em geral, os estudantes universitários de matemática são incapazes de explicar a estudantes do Ensino Básico como se multiplicam duas frações. Antes de mais, se não todos, pelo menos a maioria dos estudantes universitários em causa não foi confrontada com este tipo de conhecimento quando, eles próprios, eram estudantes do Ensino Básico (veja-se, por exemplo, [16]). Mais ainda, o que eles aprenderam sobre frações na universidade tem a ver com a estrutura abstrata do corpo dos números racionais e não sobre como as frações estão relacionadas com situações do dia a dia. Consequentemente, não é que um estudante universitário seja ignorante sobre frações, mas a sua compreensão das frações está divorciada das preocupações dos estudantes do Ensino Básico. Na medida em que a multiplicação é a base da divisão, o mesmo comentário aplica-se à divisão de frações na matemática escolar, como mostraremos de seguida.

Como parte da missão dos estudos universitários de redução dos vários fenómenos à sua essência básica, as quatro operações são reduzidas a apenas duas, a saber: a adição e a multiplicação. Num corpo a subtração $a - b$ é, *por definição,* a adição $a + (-b)$, onde -b é o *inverso aditivo* de b, e a divisão $a \div b$ ($b \neq 0$) é, *por definição,* apenas a multiplicação $a \times b^{-1}$, onde b^{-1} é o inverso multiplicativo de b. Como o inverso multiplicativo de um racional não nulo $\frac{s}{t}$ é, claramente, apenas o seu recíproco $\frac{t}{s}$, a regra de multiplicação pela inversa é agora - tal como a fórmula do

[2] A referência do autor a universidades e ao ensino universitário deve, no contexto português, ser entendido como dizendo respeito a qualquer dos subsistemas, universitário ou politécnico.

produto (8) - uma questão de definição:

$$\frac{u}{v} \div \frac{s}{t} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{u}{v} \times \left(\frac{s}{t}\right)^{-1} = \frac{u}{v} \times \frac{t}{s}. \qquad (9)$$

Do ponto de vista da matemática abstrata, tendo estabelecido a multiplicação, a divisão é apenas uma consideração *a posteriori*. Os estudantes de matemática estarão, nesta altura, normalmente, ocupados explorando as novas estruturas algébricas (grupos, corpos, anéis, etc.) e qualquer questionamento sobre a divisão e as suas ramificações na vida real não entrará o seu espírito. Se eles não conseguem ajudar os alunos do Ensino Básico a ultrapassar o seu medo da regra da multiplicação pela inversa[3] , não é, mais uma vez, porque eles saibam menos do que os professores do Ensino Básico, mas porque sabem algo *diferente* daquilo que preocupa os estudantes do Ensino Básico.

3. O QUE É A MATEMÁTICA ESCOLAR?

Por intermédio de um único tópico, muito limitado, - a divisão de frações - ficámos cientes da diferença crítica entre o que pode ser chamada de *matemática superior* (a matemática ensinada no Ensino Superior para preparar os estudantes para a investigação em matemática) e a *matemática escolar* (a matemática ensinada nas escolas do Ensino Básico e Secundário). O objetivo principal da primeira é introduzir os estudantes à matemática abstrata e, para este fim, a sua ênfase é em completude lógica e na abstração. Independentemente do modo como seja feito, é uma abordagem austera e demasiadamente sofisticada para ser usada em escolas do ensino não superior.

Os alunos do Ensino Básico, vindos predominantemente do mundo das experiências táteis, necessitam de uma ponte que os ajude na transição para o mundo da abstração. A matemática escolar é uma tal ponte e deveria ser reconhecida como uma disciplina independente, dedicada à *adaptação* da matemática universitária às necessidades dos estudantes do ensino não superior. Neste sentido preciso, a *matemática escolar* é **engenharia matemática** (veja [7]).

No entanto, observe-se que há boa engenharia e há, também, má engenharia. A boa engenharia tem sempre presente os princípios básicos das ciências que lhe estão associadas - por exemplo, a engenharia mecânica não se empenha no projeto de uma máquina de movimento perpétuo - mas má engenharia pode fazer exatamente o oposto. No caso da matemática, má engenharia matemática tem estado em ação há demasiado tempo, pelo menos nos Estados Unidos, e tem produzido matemática escolar que parece fazer questão de desafiar princípios fundamentais da matemática (veja-se, e.g., [16]). Antes de prosseguir, explicitemos uma versão dos **princípios fundamentais da matemática** ([8]):

(*i*) **Definições claras.** Cada conceito é definido com precisão, de modo a poder ser usado para raciocinar.

(ii) **Raciocínio lógico.** Toda a afirmação é suportada por um raciocínio que explica o *porquê* da sua veracidade. (É compreensível que em alguns casos especiais, como o teorema fundamental da Álgebra, o raciocínio possa ser deferido.)

(iii) **Linguagem precisa.** Não existe espaço para a ambiguidade numa disciplina onde a distinção entre verdadeiro e falso é absoluta.

(iv) **Coerência**. Os conceitos e competências não são peças e bocados fragmentados, mas fazem parte de um todo coerente.

(v) **Finalidade.** Cada conceito ou competência tem uma finalidade.

Tivemos ocasião de observar todos estes princípios em ação na discussão precedente sobre a divisão de frações: fração, multiplicação de frações e divisão de frações foram todos definidos com precisão de modo a tornar possível o uso do raciocínio para explicar fórmulas como (8) e (9); um exemplo da precisão existente em matemática escolar é a definição de divisão inteira, que mostra porque "$m \div n$ " não faz sentido para dois inteiros positivos arbitrários m e n; quanto à coerência, esforçámo-nos por explicar como é que a definição de multiplicação de frações surge da definição de fração, bem como da multiplicação de inteiros positivos. Mostrámos também que a definição de divisão de frações é modelada a partir da divisão de inteiros positivos. Finalmente, se bem que a *finalidade* dos conceitos de fração, multiplicação e divisão de frações seja perfeitamente óbvia, existem muitos outros conceitos ou competências cuja presença no currículo escolar não está bem explicada, por exemplo: porquê aprender a arredondar um número para a dezena ou para o milhar mais próximo (veja Capítulo 10 de [9]), porquê tomar o valor absoluto de um número real (veja pp.130-131 de [13], e pp.120 e 123 de [15]), etc. Veja-se também a discussão sobre *declive*, mais abaixo.

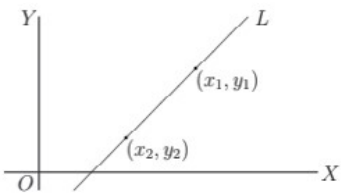
Referir-nos-emos à matemática escolar que observa os princípios fundamentais acima como **MEBP}** (Matemática Escolar Baseada em Princípios; veja [5]).

Temos, agora, as ferramentas necessárias para revisitar o problema relativo à educação matemática dos professores que Begle, Ball, e outros descobriram mas não articularam claramente. Na nossa linguagem, a mensagem deles é a de que, para obter professores matematicamente competentes temos de lhes ensinar *MEBP* em vez de matemática universitária. Isto porque a matemática escolar e a matemática universitária são disciplinas relacionadas mas essencialmente distintas, pelo que saber matemática universitária não implica que se saiba MEBP. Sublinhámos as suas diferenças usando um pequeno tópico - a divisão de frações- mas existem muitos outros exemplos. Vejamos, brevemente, dois exemplos adicionais: o conceito de *declive* de uma linha reta, e o vasto tema do currículo escolar de Geometria. Exemplos semelhantes são assinalados ao longo dos seis volumes [9]-[11] e [13]-[15].

Consideremos como a matemática escolar trata o conceito de declive. O principal ponto de partida é deixar os estudantes reterem a sua conceção naif de uma linha reta na geometria euclidiana e definir *declive* em termos dessa conceção ingénua. Então, seja dada uma linha reta L no plano $\mathbb{R}^2$. Suponha-se que L é não *vertical,* (i.e., não paralela ao eixo dos yy). Então, a matemática escolar define o **declive** de L como o quociente

$$\text{declive de L} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \tag{10}$$

onde (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são quaisquer dois pontos distintos de L.



Podemos explicar aos estudantes que o declive de uma reta (não vertical) é uma medida da sua inclinação relativamente ao eixo dos xx (veja-se pp.338-346 em [13]). A propósito: esta explicação é um exemplo da *finalidade* de um conceito. De qualquer modo, o facto central acerca do declive é o seguinte teorema (Teorema 6.11, na página 354 de [15]).

Teorema 1. *O gráfico de uma função afim $y = mx + b$ (com m e b constantes) é uma linha reta com declive m, e reciprocamente, uma linha reta com declive m é o gráfico de uma função $y = mx + b$.*

Existe uma subtileza escondida na definição de declive: como é que sabemos que o membro direito de (10) não muda qualquer que sejam os dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) escolhidos em L? A maioria dos manuais escolares evade esta questão, o que origina muitas confusões na compreensão do declive por parte dos estudantes. O facto é que para responder a esta questão precisamos do teorema que afirma que dois triângulos são semelhantes se tiverem dois ângulos iguais. São raros os *curricula* que cobriram a semelhança de triângulos quando chegam à altura de tratar o tópico do declive[4]. Consequentemente, o declive é raramente definido de modo correto. Se um conceito não é definido corretamente, então não pode existir um teorema envolvendo esse conceito. Portanto, o Teorema 1 quase nunca é demonstrado na matemática escolar.

Não surpreendentemente, a matemática universitária aborda o declive ignorando qualquer referência ao conhecimento ingénuo dos estudantes, simplesmente *definindo* uma linha reta no plano como o gráfico da função $y = mx + b$ (com m e b constantes) ou $x = b$ (uma reta vertical). Depois, o **declive** do gráfico de $y = mx + b$ é, por definição, m. Muito simples! Portanto, a brevidade e a total clareza são conseguidas à custa da intuição do estudante. (Infelizmente, existem manuais do professor para os professores do Ensino Básico que também ignoram a necessidade da engenharia matemática e também definem uma reta do mesmo modo.) Claramente, essa compreensão do declive de uma reta, se bem que matematicamente correta, não ajudará os estudantes do ensino pré-universitário na assimilação do conceito de declive.

Finalmente, umas breves observações sobre o currículo escolar da Geometria. Existem defeitos óbvios nesse currículo que clamam por correção. Já alertámos para

[3] No original: "The Fear of 'Ours is not to reason why, just invert and multiply'" *(N. do T.)*

[4] O autor está a referir-se a programas do Estados Unidos. Em Portugal, no Programa e Metas Curriculares do Ensino Básico, a semelhança de triângulos era tratada no 7.º ano e o declive no 8.º. Este programa vigorou entre junho de 2013 e julho de 2021, tendo sido revogado a 6 de julho e substituído pelas chamadas "Novas Aprendizagens Essenciais", um texto que parece ter sido propositadamente escrito para falhar os princípios fundamentais da MEBP. *(N. do T.)*

a necessidade de coordenar o estudo da semelhança de triângulos com o ensino do declive, o que, em geral, não sucede. Também é necessário explicar os conceitos de *congruência* e de *semelhança*, porque estes surgem naturalmente na vida do dia a dia, mas o currículo escolar considera, usualmente, apenas a congruência e a semelhança de *triângulos* mas não as de outras figuras geométricas gerais[5]. Tal é, não apenas, uma deficiência do ponto de vista da educação em geral, como é prejudicial para o próprio currículo da matemática escolar porque o conhecimento da congruência e da semelhança de parábolas clarificaria o tratamento de funções e equações quadráticas (veja-se secções 2.1 e 2.2 de [14]). Finalmente, o estudo da geometria euclidiana é normalmente apresentado como a joia da coroa da educação escolar, ao ensinar aos alunos como usar a lógica para provar *tudo* estritamente com base nos axiomas. Quanto mais cedo contrariarmos, nos estudantes, esta ilusão, tanto melhor! De facto, sabemos desde o trabalho de Hilbert (1862-1942) que o sistema axiomático da geometria euclidiana é extraordinariamente subtil e os seus detalhes internos não são adequados para a educação escolar (veja-se os capítulos iniciais do livro de Hartshorne, [4]; eles extenuarão até a dedicação dos estudantes universitários mais dedicados). A matemática escolar deve afastar-se destes faz-de-conta sobre sistemas axiomáticos da geometria euclidiana e, em vez disso, deve tentar introduzir na geometria euclidiana um número razoavelmente grande de hipóteses *redundantes* para minimizar a necessidade de os estudantes provarem um número elevado de resultados maçadores, óbvios, e difíceis de demonstrar para um principiante. Compare-se os capítulos 4 e 5 de [13] e 6 e 8 de [14].

É desnecessário dizer que nenhuma parte da matemática universitária abordará algum destes problemas levantados pela apresentação da geometria no Ensino Secundário. O que é necessário para tornar a geometria no plano verdadeiramente digerível pelos estudantes do Ensino Secundário é uma séria engenharia matemática.

4. UMA PROVA DE EXISTÊNCIA

Até aqui, advogámos a necessidade de ensinar MEBP aos prospetivos professores. A hipótese implícita é que a MEBP sempre esteve à nossa volta e basta apenas usá-la. Isto é uma hipótese agradável de fazer e ainda mais agradável de acreditar. No entanto, será cauteloso constatar que, com tantas variedades de matemática escolar defeituosa no mundo, existe a clara possibilidade de que pode ser impossível ajustar a matemática superior para o consumo das escolas básicas e secundárias sem violar um, ou mais, dos princípios fundamentais da matemática. Alan Schoenfeld parece ter sido o primeiro dos investigadores em educação matemática a reconhecer, em 1994, que, se bem que ele acreditasse que algo como MEBP deveria existir, não existia ainda nenhuma prova documental de que tal fosse o caso ([6]). O que podemos reportar em 2021 é que existe, agora, pelo menos uma exposição sistemática da MEBP desde a pré-escola ao 12.º ano, na forma de seis volumes com, *grosso modo*, a seguinte organização: [9] para professores desde a pré-escola até ao 2.º ciclo do Ensino Básico, [10] e [11] para professores dos 2.º e 3.º ciclos, e [13]-[15] para professores do 3.º ciclo e secundário.

Podemos explicar a necessidade para uma tal exposição *completa* de 13 anos de MEBP. Tem havido artigos e livros que demonstram a possibilidade de introduzir argumentos rigorosos em um ou dois tópicos da matemática escolar, mas discussões nessa escala limitada não conseguem ilustrar a essência dos princípios fundamentais da matemática. Por exemplo, para expor os professores à necessidade de definições precisas, não podemos mostrar-lhes MEBP em apenas uns quantos tópicos porque eles necessitam de sentir essa necessidade em *todos* os aspetos da matemática escolar, incluindo nas definições dos conceitos mais mundanos, tais como percentagem, rácio, velocidade, equação, variável, ângulo, gráfico de uma desigualdade, etc. Por outro lado, considere o tema da coerência: é normalmente invisível quando observamos a matemática escolar ao microscópio, como quando nos focamos na adição ou na divisão de frações. Mas quando o tema das frações é tomado como um todo, então o modo como o teorema das frações equivalentes agrega todas as diversas partes do estudo das frações é qualquer coisa de admirável (veja-se, e.g., pp. 28-86 de [10]). Numa escala ligeiramente maior, também testemunhamos a coerência em ação quando se mostra que o conceito de divisão é qualitativamente o mesmo para inteiros positivos, frações, números racionais e números reais (cf. [9]). Podemos também acrescentar que, na ausência de uma tal visão abrangente da matemática escolar, os defeitos do currículo de geometria poderiam não ter sido detetados.

Os seis volumes da exposição da MEBP, além de poderem servir de fundação para manuais de matemática escolar para estudantes, mostram, de modo detalhado, como podemos atingir uma melhor educação matemática para os professores. Nos Estados Unidos, os professores são formados em três bandas de anos: elementar (do pré-escolar ao 5.º ano), médio (6.º-8.º anos), e secundário (9.º-12.º anos). Como se observou, estes seis volumes foram escritos tendo presente esta banda de anos, pelo que, em conjunto, eles constituem uma resposta à questão implicitamente colocada por Begle, Ball e outros, a saber: que tipo de matemática devemos ensinar aos futuros professores? (Uma resposta mais detalhada a esta questão é dada na página 21 do prefácio de [13].) Escusado será dizer que os *currícula* matemáticos das escolas não são, nem nunca serão, todos iguais, mas temos esperança de que uma apresentação completa da MEBP possa, apesar disso, contribuir para uma melhor educação matemática escolar, libertando os educadores da necessidade de realizar de novo esta tarefa de engenharia matemática. Deverá, agora, ser relativamente simples modificar os modelos existentes ([9]-[11] e [13]-[15]) para os adaptar às diversas necessidades.

Agradecimentos. Agradeço a Larry Francis as suas importantes sugestões de melhoria.

REFERÊNCIAS

[1] D. L. Ball, "The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education", *Elementary School Journal* **90** (1990), 449-466.

[2] E. G. Begle. "Teacher knowledge and student achievement in algebra", *SMSG Reports*, No. 9. 1972. *https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED064175.pdf*

[3] E. G. Begle. *Critical Variables in Mathematics Education: Findings from a Survey of the Empirical Literature*, Mathematical Association of America / National Council of Teachers of Mathematics, Washington DC / Reston VA, 1979.

[4] R. Hartshorne. *Geometry: Euclid and Beyond*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2000.

[5] R. C. Poon,. "Principle-Based Mathematics: An Exploratory Study." Dissertation at University of California, Berkeley. 2014. *http://escholarship.org/uc/item/4vk017nt*

[6] A. Schoenfeld. "What do we know about Mathematics Curricula?" *Journal of Mathematical Behavior*, **13** (1994), 55-80.

[7] H. Wu, "How mathematicians can contribute to K-12 mathematics education", *Proceedings of International Congress of Mathematicians, Madrid 2006*, Volume III, 1676-1688. European Mathematical Society, 2006. *http://math.berkeley.edu/~wu/ICMtalk.pdf*

[8] H. Wu. "Phoenix rising. Bringing the Common Core State Mathematics Standards to life." *American Educator*, **35** (3), 2011, 3-13. *http://www.aft.org/pdfs/americaneducator/fall2011/Wu.pdf*

[9] H. Wu. *Compreender os Números na Matemática Escolar.* Porto Editora / Sociedade Portuguesa de Matemática, Porto, 2017. (Tradução portuguesa de: *Understanding Numbers in Elementary School Mathematics.* American Mathematical Society, Providence RI, 2011.)

[10] H. Wu. *Teaching School Mathematics: Pre-Algebra*. American Mathematical Society, Providence RI, 2016.

[11] H. Wu. *Teaching School Mathematics: Algebra*. Providence, RI: American Mathematical Society, Providence RI, 2016.

[12] H. Wu. "The content knowledge mathematics teachers need". In: Y. Li, W. J. Lewis, J. Madden (Eds.). *Mathematics Matters in Education: Essays in Honor of Roger E. Howe*. pp. 43-91. Advances in STEM Education, Springer, Cham, 2018. *https://math.berkeley.edu/~wu/Contentknowledge1A.pdf*

[13] H. Wu. *Rational Numbers to Linear Equations*. American Mathematical Society, Providence RI, 2020.

[14] H. Wu.*Algebra and Geometry*. American Mathematical Society, Providence RI, 2020.

[15] H. Wu. *Pre-Calculus, Calculus, and Beyond*, American Mathematical Society, Providence RI, 2020.

[16] H. Wu. "Learnable and unlearnable school mathematics". 2021. *https://math.berkeley.edu/~wu/AE2020A.pdf*

[5] Mais uma vez, em Portugal, no Programa e Metas Curriculares do Ensino Básico, revogados recentemente, o caso geral era abordado no 7.º ano.

SOBRE O AUTOR

Hung-Hsi Wu é professor emérito de Matemática da Universidade da Califórnia, em Berkeley, Estados Unidos. É um geómetra que passou os últimos 25 anos formando professores dos ensinos Básico e Secundário.