

COMO GERAR UM MANUAL DE INSTRUÇÕES AUTOMÁTICO PARA BRINQUEDOS DE CONSTRUÇÃO?

Durante o 125º European Study Group with Industry (ESGI), realizado em Limassol, Chipre, 5 a 9 de Dezembro de 2016, uma das empresas participantes colocou um desafio muito interessante aos matemáticos do grupo de estudo. A Engino.net Ltd, fundada em 2014, é uma empresa cipriota que produz conjuntos de brinquedos de construção. Cada conjunto de brinquedos, vendido em caixas de blocos, permite obter uma série de modelos que podem ser montados de múltiplas formas. A questão colocada ao grupo de estudo foi: como obter um procedimento que permita gerar automaticamente as instruções de montagem de um determinado brinquedo? A resposta dada, que iremos resumir neste artigo, baseia-se na teoria dos grafos dirigidos. O leitor mais curioso é convidado a ler a versão detalhada em [1].

1. INTRODUÇÃO E MOTIVAÇÃO

Os brinquedos de construção Engino® (*engino.com*) são criados através da montagem de pequenos blocos e vendidos em conjuntos de modelos, tal como apresentados na figura 1. Cada um dos conjuntos tem um número específico de blocos, que podem ser montados de variadíssimas formas, dando origem a modelos muito diversos. O potencial criativo dos brinquedos aumenta exponencialmente à medida que o número de blocos do conjunto aumenta, tanto mais que os blocos Engino® permitem a conectividade simultânea em múltiplas direcções espaciais.

O desafio proposto pela empresa no 125º ESGI¹ consistiu em determinar um algoritmo capaz de gerar automaticamente o manual de montagem para cada brinquedo. Até então, para a maioria dos conjuntos de brinquedos, as instruções de montagem eram criadas manualmente. Os programadores da empresa criaram um sistema de montagem automática (ver exemplo na



Figura 1. Conjunto de brinquedos Engino®.

¹Mais informações sobre os ESGIs podem ser vistas em [4].

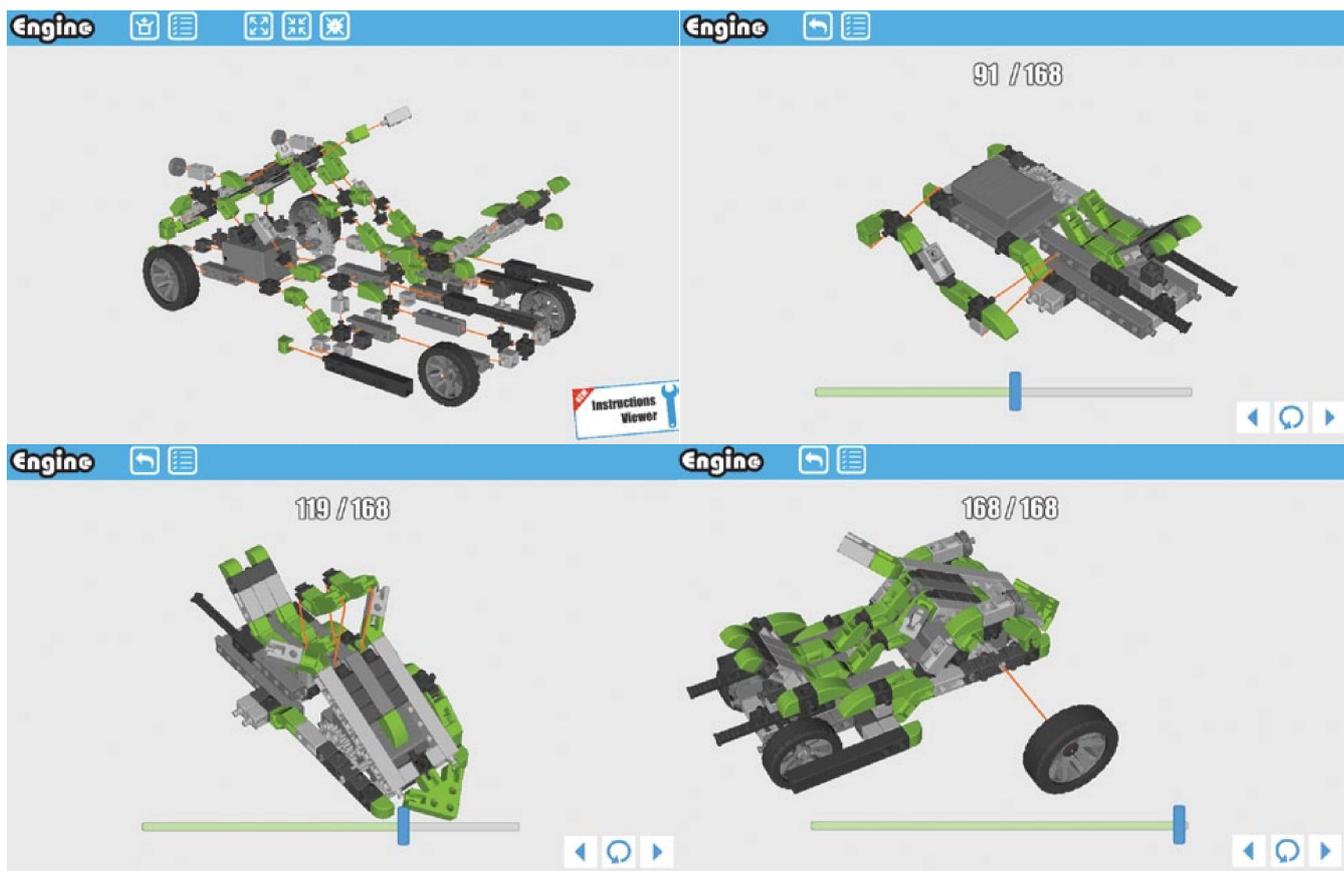


Figura 2. Excerto de um manual de instruções online.

figura 2) baseado na plataforma de construção tridimensional UNITY 3D-Game Engine (*unity.com*) que, à data do ESGI, apresentava inúmeros erros. Em particular, o sistema não conseguia prever a ordem com que os blocos deveriam ser ligados durante as instruções de montagem e a prioridade das peças era apresentada de uma forma quase aleatória e incorreta, fazendo com que as instruções geradas pelo programa não fossem sempre fisicamente viáveis. O grupo de estudo foi desafiado a propor um algoritmo capaz de dar prioridade às diferentes partes da estrutura do modelo, definindo uma sequência de passos que correspondam a ligações fisicamente viáveis entre conjuntos de blocos, e que pudesse ser usado na melhoria do sistema automático existente.

As instruções de montagem propostas à empresa seguem um processo recursivo inverso baseado na teoria dos grafos dirigidos. Mais concretamente, considera-se um grafo dirigido associado a cada modelo, onde os vértices correspondem aos blocos que constituem o modelo e os arcos representam ligações físicas entre os blocos. Os arcos são

rotulados com um vetor de direção por forma a identificar a direção geométrica da ligação entre os blocos. Removendo grupos de arcos que partilham o mesmo vetor de direção, identificamos os submodelos resultantes que, por sua vez, são utilizados para construir um novo grafo dirigido. A ausência de ciclos dirigidos nesse novo grafo desempenha um papel fundamental na determinação do subconjunto de arcos cuja remoção implica uma decomposição fisicamente viável do modelo. Uma vez decomposto o modelo nos blocos que o constituem, as etapas da decomposição podem ser invertidas para produzir o manual de instruções de montagem pretendido.

O problema de determinar os passos necessários para decompor uma estrutura complexa nas suas componentes tem sido objeto de vários estudos que datam dos anos 80 do século passado. Esta classe de problemas é denominada na literatura por *disassembly sequencing*, que poderemos traduzir por sequência de desmontagem (ver [6] para um estudo exaustivo). A motivação por detrás do estudo das sequências de desmontagem tem origem, principalmen-

te, no facto de que, invertendo as etapas de uma sequência de desmontagem, se pode obter um procedimento de montagem da estrutura em estudo. Nesse sentido, as sequências de desmontagem estão intimamente relacionadas com a geração automática de instruções de montagem de estruturas complexas (ver, por exemplo, [3, 5, 7]). O procedimento proposto em [1], cuja versão simplificada é aqui considerada, pode ser comparado com o apresentado em [3, 7]. No entanto, ao contrário da abordagem utilizada por esses autores, que considera a separação das peças individuais da estrutura uma a uma e aplica uma estratégia de procura para a extração hierárquica das componentes, o método que iremos descrever obtém diretamente uma decomposição fisicamente viável de componentes ao longo de uma dada direção espacial.

O conteúdo do artigo está organizado da seguinte forma: na secção 2 iremos recordar alguns conceitos e resultados básicos da teoria dos grafos dirigidos. Na secção seguinte, apresentamos o quadro teórico proposto e, através de um exemplo motivador, introduzimos a noção de decomposição fisicamente viável de um modelo de brinquedo. Apresentamos também a noção de grafo de conectividade entre componentes, obtido pela remoção de um conjunto de arcos do grafo original, e provamos que tal remoção corresponde a uma decomposição fisicamente viável se e só se o respetivo grafo de conectividade entre componentes for acíclico. Na secção 4 esboçamos o procedimento algorítmico que permite obter a decomposição do modelo de brinquedo, utilizando como etapas intermédias as decomposições fisicamente viáveis máximas ao longo das várias direções espaciais escolhidas. De notar

que tais decomposições podem ser obtidas através da aplicação de algoritmos de tempo linear (ver [1]). Na secção 5 serão feitos breves comentários finais.

2. MODELOS DE BRINQUEDOS E GRAFOS DIRIGIDOS

A noção de grafo dirigido irá ser usada para capturar a estrutura dos brinquedos de construção. Não iremos detalhar todas as definições e os resultados da teoria dos grafos dirigidos usados no texto, mas estes podem ser vistos em [1] e nas referências aí contidas.

Dado um modelo de brinquedo \mathcal{M} , associamos-lhe um grafo dirigido $G(V, A)$, onde $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é o conjunto de vértices de G , com cada vértice v_i correspondente a um bloco de \mathcal{M} , e $A = \{(u, v) : u, v \in V\}$ é o conjunto de arcos de G , com cada arco representando uma ligação entre dois blocos do modelo. Cada ligação física entre dois blocos do modelo pode ser representada no espaço por um determinado vetor de direção, escolhido a partir de um conjunto finito de direções. Uma ligação entre dois blocos u e v do modelo ao longo de uma direção particular \hat{d} no espaço físico, dá origem a um arco $(u, v) \in A$ ao qual se associa o rótulo \hat{d} .

Exemplo. Considere-se o modelo dado na figura 3 (lado esquerdo). O grafo dirigido $G(V, A)$ associado ao modelo está representado no lado direito da mesma figura, onde \hat{d}_1, \hat{d}_2 são, respetivamente, os vetores correspondentes à direção horizontal (esquerda - direita) e à direção vertical (de baixo para cima). Neste caso, $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $A = \{(4, 2), (4, 3), (4, 5), (2, 3), (2, 1), (3, 1), (1, 5)\}$.

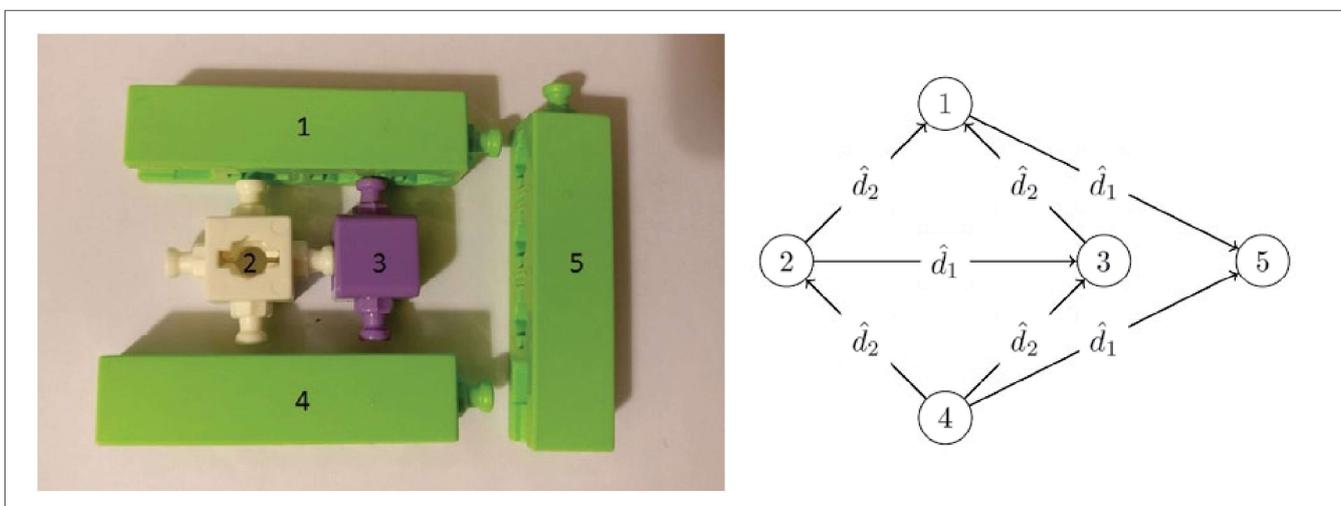


Figura 3. Modelo de brinquedo (esquerda) e respetivo grafo (direita).

Assumindo que todas as ligações do modelo \mathcal{M} correspondem a p direções espaciais distintas \hat{d}_i , podemos particionar o conjunto dos arcos A numa família de p conjuntos mutuamente disjuntos A_i , $i = 1, 2, \dots, p$, cada um dos quais contendo os arcos associados a ligações partilhando a mesma direção no espaço. Para o modelo dado na figura 3, temos $A_1 = \{(2,3), (4,5), (1,5)\}$ e $A_2 = \{(4,2), (4,3), (2,1), (3,1)\}$.

3. DECOMPOSIÇÕES FÍSICAMENTE VIÁVEIS

Apresentamos agora o quadro teórico que permite definir a metodologia para a obtenção da decomposição de um modelo de forma fisicamente viável. Começamos por definir as noções de decomposição fisicamente viável e de grafo de conectividade entre componentes, provando, posteriormente, que uma decomposição é fisicamente viável se e só se o respetivo grafo de conectividade entre componentes é acíclico. Relembremos que, por definição, num grafo acíclico dirigido $G(V, A)$ não existem arcos $(v, v) \in A$, com $v \in V$.

3.1 Definição e exemplos

Consideremos um modelo constituído por dois blocos correspondentes aos vértices $v_1, v_2 \in V$, ligados através de um arco $(v_1, v_2) \in A$ alinhado segundo uma direção \hat{d}_i . Notemos que os blocos v_1, v_2 podem ser separados segundo as direções $-\hat{d}_i, \hat{d}_i$, respetivamente, quando forças opostas apropriadas são aplicadas nos dois blocos. Recorrendo, de novo, à figura 3, se considerarmos o modelo apenas com os blocos 2 e 3 – isto é, sem os blocos verdes 1, 4 e 5 –, a separação destes blocos é fisicamente viável por aplicação de duas forças horizontais opostas, uma vez que a sua aplicação resulta em deslocamentos opostos ao longo da direção horizontal. No entanto, se adicionarmos, por exemplo, o bloco 1 ao modelo, os blocos 2 e 3 já não podem ser separados através da aplicação de forças horizontais opostas sobre eles, uma vez que a sua deslocação está bloqueada pelas suas ligações verticais.

Consideremos agora a situação em que temos um modelo complexo que pretendemos decompor em dois submodelos de uma forma fisicamente viável. Em geral, a remoção de um conjunto de arcos rotulados com uma dada direção corresponde a uma decomposição do grafo do modelo em duas ou mais componentes cujos grafos dirigidos que lhes estão associados são fracamente conexos, isto é, onde todos os vértices estão ligados entre si por algum caminho, ignorando a direção dos arcos.

Decomposição fisicamente viável em duas componentes (2-DFV): A remoção de um conjunto de arcos, alinhados segundo uma direção espacial particular, \hat{d}_i , é fisicamente viável se e só se as duas componentes (fracamente conexas) C_1 e C_2 resultantes podem ser deslocadas ao longo das direções $-\hat{d}_i, \hat{d}_i$ respetivamente, quando forças opostas apropriadas são aplicadas sobre estas componentes (ver figura 4).

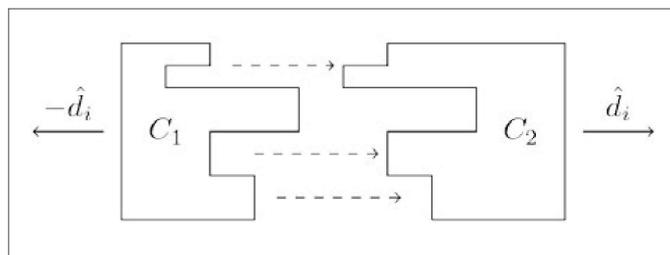


Figura 4. Exemplo de uma 2-DFV.

O nosso próximo objetivo consiste em obter uma caracterização das 2-DFV's que são possíveis ao longo de uma dada direção. Para isso, vamos começar por introduzir a noção de grafo de conectividade entre as componentes de um modelo que resultam da remoção de um conjunto de arcos identificados com o mesmo rótulo.

Grafo de conectividade entre componentes (GCC):

Seja $G(V, A)$ o grafo dirigido associado a um modelo \mathcal{M} e $\bar{A}_i \subseteq A_i$ um conjunto (não vazio) de arcos, onde A_i é o conjunto de todos os arcos de $G(V, A)$ ao longo da direção espacial \hat{d}_i . O grafo de conectividade entre componentes (GCC), resultante da remoção dos arcos \bar{A}_i , é um grafo dirigido $G_C(V_C, A_C)$ cujos vértices são as componentes fracamente conexas C_i , $i = 1, 2, \dots, k$, obtidas pela decomposição de $G(V, A)$ resultante da remoção dos arcos \bar{A}_i . Duas componentes C_i, C_j estão ligadas através de um arco $(C_i, C_j) \in A_C$ se e só se $i \neq j$ e existe um arco $(v, u) \in \bar{A}_i$ com $v \in C_i$ e $u \in C_j$. Note-se que, de acordo com esta definição, o GCC resultante da remoção de um conjunto de arcos $\bar{A}_i \subseteq A_i$ é um grafo dirigido simples, uma vez que, por construção, não pode conter nenhum ciclo nem arcos paralelos que partilhem os mesmos vértices de origem e de destino.

Recorrendo, de novo, ao modelo apresentado na figura 3, se removermos todos os arcos ao longo da direção horizontal, ou seja, os arcos $(2,3)$, $(1,5)$ e $(4,5)$, o grafo é decomposto em duas componentes fracamente conexas, $C_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ e $C_2 = \{5\}$, representadas na

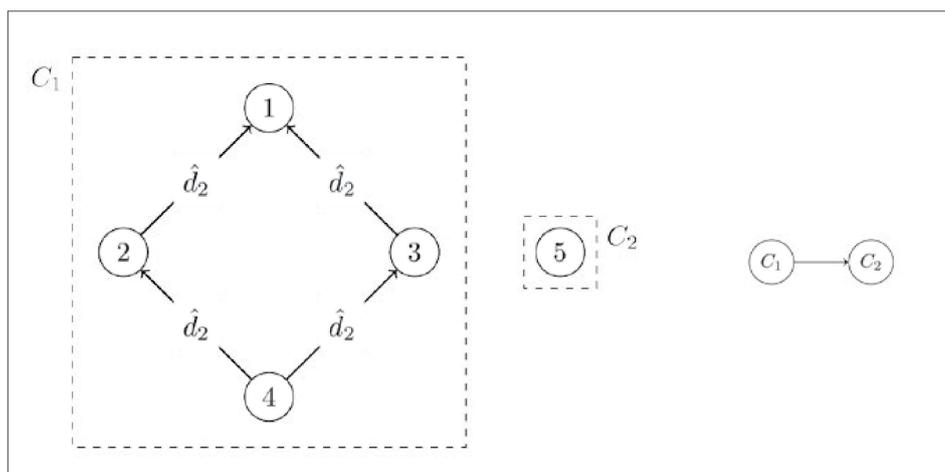


Figura 5. Grafo $G(V, A)$ depois da remoção de todos os arcos ao longo da direção \hat{d}_1 (esquerda) e respetivo GCC (direita).

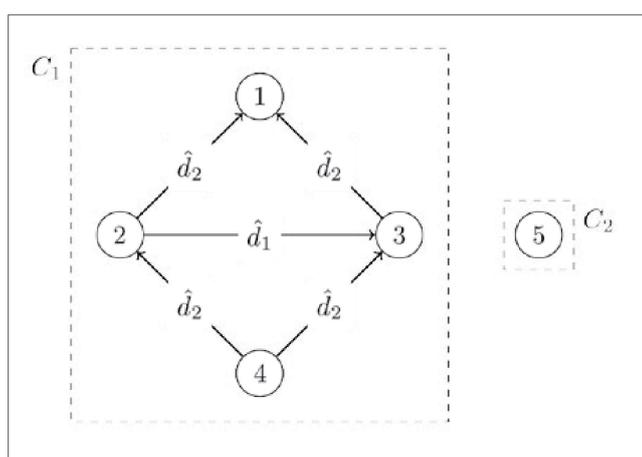


Figura 6. Grafo $G(V, A)$ depois da remoção de todos os arcos fisicamente removíveis ao longo da direção \hat{d}_1 .

figura 5 (lado esquerdo). O GCC resultante desta remoção de arcos está representado na figura 5 (lado direito). Claramente, nada impede a deslocação das duas componentes C_1, C_2 de avançar na direção $-\hat{d}_1, \hat{d}_1$, respetivamente, quando lhes são aplicadas forças horizontais adequadas. Assim, a remoção dos arcos horizontais implica uma 2-DFV do modelo.

Nem todos os arcos removidos na obtenção do GCC correspondem a uma decomposição fisicamente viável de dois blocos. É o caso do arco (2,3), que não aparece na figura 5 devido à sua remoção no processo de construção do GCC. Apesar de este arco poder ser teoricamente removido durante a remoção de todos os arcos horizontais, os blocos 2 e 3 não podem ser separados por causa das ligações perpendiculares aos blocos 1 e 4. Por outro lado, os arcos (1,5) e (4,5) contribuem ativamente para a decomposição do grafo em duas componentes C_1 e C_2 . A propriedade distintiva entre estes dois tipos de arcos

é que a primeira tem ambos os seus pontos finais na mesma componente, enquanto as duas últimas têm os seus pontos iniciais e finais em componentes distintas. Os arcos que contribuem ativamente para a formação de componentes fracamente conexas de um GCC são chamados fisicamente removíveis para esse GCC. Na figura 6 representamos o grafo obtido após a remoção de todos os arcos fisicamente removíveis segundo a direção \hat{d}_1 .

Se optarmos por remover todos os arcos ao longo de \hat{d}_2 , obtemos as componentes fracamente conexas C'_1 e C'_2 mostradas na figura 7 (lado esquerdo). O GCC obtido por esta remoção de arcos é mostrado na figura 7 (lado direito). Apesar de a remoção dos quatro arcos verticais, rotulados com \hat{d}_2 , separar o grafo em duas componentes fracamente conexas, é evidente que tal decomposição não é fisicamente viável. De facto, os blocos 2 e 3 de C'_1 não podem ser deslocados verticalmente porque estão presos entre os blocos 1 e 4 de C'_2 .

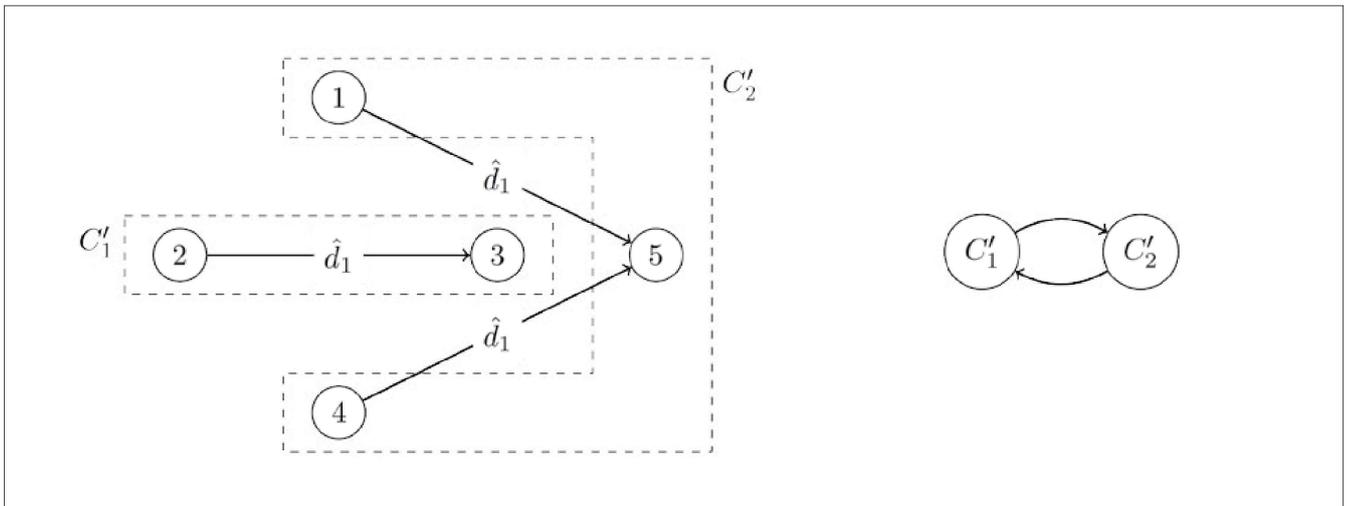


Figura 7. Grafo $G(V, A)$ depois da remoção de todos os arcos ao longo da direção \hat{d}_2 (esquerda) e respetivo GCC (direita).

3.2 Caracterização das decomposições fisicamente viáveis

A questão que se coloca é a de saber como caracterizar uma decomposição fisicamente viável de um modelo em termos das propriedades particulares dos arcos do GCC correspondente.

Começemos por considerar o caso das 2-DFVs. Se $G_C(V_C, A_C)$, com $V_C = \{C_1, C_2\}$, for o GCC associado a um determinado modelo resultante da remoção de um conjunto (não vazio) de arcos $\bar{A}_i \subseteq A_i$ com A_i o conjunto de todos os arcos do grafo $G(V, A)$ do modelo ao longo da direção \hat{d}_i , pode provar-se que a remoção dos arcos de \bar{A}_i é uma 2-DFV do modelo se e só se A_C contiver exatamente um dos arcos (C_1, C_2) ou (C_2, C_1) . De facto, se assumirmos que A_C contém apenas um desses arcos, digamos o arco (C_1, C_2) , isto significa que, no modelo, as componentes C_1 e C_2 estão ligadas apenas por um lado, deixando os seus lados externos livres (ver figura 4). Assim, removendo os arcos \bar{A}_i que ligam os vértices de C_1 aos de C_2 , obtemos uma 2-DFV do modelo, já que C_1 pode ser deslocado na direção de $-\hat{d}_i$ e C_2 na direção de \hat{d}_i . Se, ao invés, assumirmos que A_C contém os dois arcos (C_1, C_2) e (C_2, C_1) , conclui-se facilmente, usando argumentos semelhantes aos já apresentados, que tal decomposição não é fisicamente viável.

Vamos assumir agora que após a remoção de um conjunto de arcos $\bar{A}_i \subseteq A_i$, obtemos $k > 2$ componentes. Uma decomposição fisicamente viável que pode ser realizada através de sucessivas aplicações de 2-DFVs é chamada uma k -DFV do modelo (ver [1] para uma definição formal

deste conceito). O teorema seguinte serve para caracterizar esta propriedade.

Teorema. *Seja \mathcal{M} um modelo de brinquedo e $G(V, A)$ o seu grafo dirigido associado. Seja ainda $G_C(V_C, A_C)$ o GCC resultante após a remoção de um conjunto não vazio de arcos $\bar{A}_i \subseteq A_i$, onde A_i é o conjunto de todos os arcos de $G(V, A)$ ao longo da direção \hat{d}_i . A remoção dos arcos \bar{A}_i implica uma k -DFV, $k \geq 2$ do modelo \mathcal{M} , se e só se G_C é um grafo acíclico dirigido.*

A demonstração deste teorema recorre a um resultado da teoria dos grafos que estabelece que se $G_C(V_C, A_C)$ é um grafo acíclico dirigido, então existe uma ordenação topológica dos seus vértices C_1, C_2, \dots, C_k , ou seja, uma ordenação tal que, para todos os arcos $(C_i, C_j) \in A_C$, se tem $i \leq j$ (ver [1] para mais detalhes). Sendo C_1 o primeiro elemento nesta ordenação, só existem arcos de saída de C_1 para $V_C \setminus \{C_1\}$ e, portanto, como foi visto anteriormente e é ilustrado na figura 8, a remoção dos arcos com origem em C_1 e terminando em $V_C \setminus \{C_1\}$ constitui uma 2-DFV.

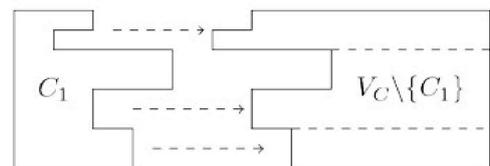


Figura 8. Uma 2-DFV de C_1 e $V_C \setminus \{C_1\}$.

Se denotarmos por G'_C o subgrafo de G_C induzido por $V_C \setminus \{C_1\}$, podemos ver que C_2, \dots, C_k é uma ordenação topológica dos seus vértices. Assim, C_2 pode ser destacado a partir de G'_C através de uma 2-DFV seguindo um procedimento semelhante ao anteriormente descrito. Após $k - 1$ aplicações de 2-DFV, utilizando subconjuntos apropriados de arcos \bar{A}_i , obtemos uma decomposição do modelo \mathcal{M} em k componentes fracamente conexas C_1, C_2, \dots, C_k , que constitui uma k -DFV. Provamos assim se G_C é um grafo acíclico dirigido, a remoção dos arcos correspondente implica uma k -DFV. A demonstração da implicação inversa pode ser vista em [1].

4. UM MODELO HIERÁRQUICO

Nesta secção descrevemos o procedimento que permite obter o manual de instruções automático para a montagem dos modelos de brinquedos Engino®. O processo corresponde a um algoritmo recursivo inverso, pois é obtido invertendo o processo recursivo de decomposição do modelo nos blocos que o constituem. É, pois, essencial o resultado apresentado na secção anterior que permite caracterizar as decomposições fisicamente viáveis.

Vamos supor que $G(V, A)$ é o grafo dirigido associado ao modelo \mathcal{M} e que cada arco em A está alinhado com uma das p direções espaciais distintas $\hat{d}_i, i = 1, 2, \dots, p$. Consideremos que $\text{MaxDFV}(C, i)$ é uma função que tem como primeiro argumento uma componente fracamente conexa C de $G(V, A)$ e como segundo argumento um inteiro $i = 1, 2, \dots, p$. Esta função devolve uma lista ordenada de componentes $C_1, C_2, \dots, C_k, k \geq 1$, com C um conjunto máximo de arcos fisicamente removíveis ao longo da direção \hat{d}_i . Como foi demonstrado em [1], a obtenção de um subconjunto máximo de arcos fisicamente removíveis ao longo de uma dada direção espacial pode ser obtido com recurso a algoritmos de tempo linear. O algoritmo seguinte esquematiza o processo de decomposição do modelo.

Algoritmo: HMaxDFV(C)

chama $(C_1, C_2, \dots, C_k) = \text{MaxDFV}(C, i)$, para cada direção $i = 1, 2, \dots, p$;

se para todas as direções $i = 1, 2, \dots, p$, se tem $k = 1$, a recursão termina;

caso contrário

para $j = 1, 2, \dots, k$

anexa C_j como descendente de C no modelo hierárquico;

chama $\text{HMaxDFV}(C_j)$;

fim do ciclo

fim do se

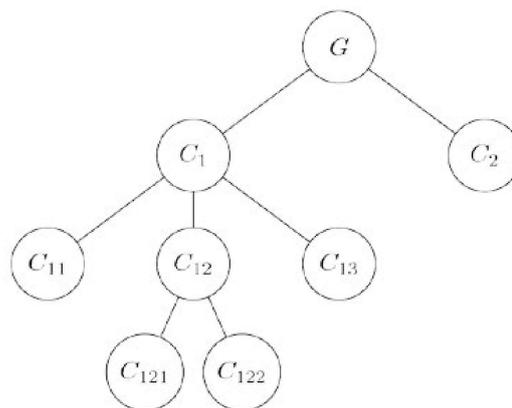


Figura 9. Modelo hierárquico de decomposição do brinquedo dado na figura 3.

Resumindo, em cada passo do algoritmo é obtida uma coleção de componentes fracamente conexas, correspondendo a uma decomposição fisicamente viável máxima ao longo de alguma direção espacial. O algoritmo global de decomposição corresponde a um modelo hierárquico de componentes que pode ser representado por uma árvore com raiz, tendo como raiz o grafo dirigido correspondente de brinquedo original e como folhas cada um dos blocos que o constituem.

Para exemplificar, embora de forma abreviada, o algoritmo proposto, atentemos, de novo, no modelo dado na figura 3. Considerando a direção \hat{d}_1 , temos $(C_1, C_2) = \text{MaxDFV}(G, 1)$, com $C_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ e $C_2 = \{5\}$ (ver figura 6). Estas duas componentes são anexadas como descendentes de G e voltamos a aplicar o algoritmo. Atendendo a que C_2 é constituído por um único vértice, vamos considerar a recursão apenas relativamente à componente C_1 . Atendendo a que \hat{d}_2 é a única direção disponível, consideramos $(C_{11}, C_{12}, C_{13}) = \text{MaxDFV}(C_1, 2)$, com

$C_{11} = \{1\}$, $C_{12} = \{2, 3\}$ e $C_{13} = \{4\}$. Finalmente, atendendo a que $(C_{121}, C_{122}) = \text{MaxDFV}(C_{12}, 1)$, com $C_{121} = \{2\}$ e $C_{122} = \{3\}$, obtemos o modelo hierárquico de decomposição ilustrado na figura 9.

Após obtida a decomposição hierárquica do modelo, o processo de decomposição é invertido, produzindo o manual de instruções de montagem pretendido. Se considerarmos o modelo da figura 3, o seu manual de instruções pode ser dado da seguinte forma. Passo 1: unir as componentes $C_{121} = \{2\}$ e $C_{122} = \{3\}$, obtendo a componente $C_{12} = \{2, 3\}$; Passo 2: unir as componentes $C_{11} = \{1\}$, $C_{12} = \{2, 3\}$ e $C_{13} = \{4\}$, obtendo a componente $C_1 = \{1, 2, 3, 4\}$; Passo 3: unir as componentes $C_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ e $C_2 = \{5\}$, obtendo o modelo pretendido.

5. COMENTÁRIOS FINAIS

A proposta aqui descrita para a obtenção de um manual automático de montagem para os modelos de brinquedos da Engino® foi apresentada à empresa, sob a forma de relatório, no final do ESGI. Nesse relatório (ver [2]), o grupo de estudo recomendou a realização de testes-piloto por forma a validar o procedimento proposto em brinquedos mais sofisticados. Este é um passo crucial que, como também foi sugerido no relatório, pode ser realizado através de um projeto de curto prazo ou com recurso a um aluno estagiário, numa colaboração estreita entre a academia e a empresa. Apesar de não conhecer as diligências efetuadas pela Engino®, a verdade é que os erros inicialmente identificados no sistema de montagem automática de modelos disponível na página da empresa foram corrigidos com sucesso.

REFERÊNCIAS

- [1] Antoniou, E., Araújo, A., Bustamante, M. D. & Gibali, A., "Physically feasible decomposition of Engino® toy models: a graph-theoretic approach". *European Journal of Applied Mathematics*, **30**, 278-297, 2019.
- [2] Araújo, A., Gibali, A., Kyprianou, A., Antoniou, E., Bustamante, M.D., Kaminski, Y. & Okrasinsk W., "Increasing the creativity of ENGINO toy sets and generating automatic building instructions". *Mathematics in Industry Reports*, 2021.
- [3] Agrawala, M., "Designing Effective step-by-step assembly instructions". *ACM Transactions on Graphics (TOG) - Proceedings of ACM SIGGRAPH 2003*, **47**, 108-124, 2003.
- [4] Costa e Silva, E., Lopes, I.C. & Correia, A. "Dez anos de encontros entre a matemática e a indústria em Portugal". *Gazeta de Matemática*, **180**, 10-20, 2016.
- [5] Hsu, Y.-Y., Tai, P.-H., Wang, M.-W. & Chen, W.-C., "A knowledge-based engineering system for assembly sequence planning". *Int J Adv Manuf Technol*, **55**, 763-782, 2011.
- [6] Lambert, A. J. D., "Disassembly sequencing: A survey". *International Journal of Production Research*, **41**, 3721-3759, 2003.
- [7] Li, W., Agrawala, M., Curless, B. & Salesin, D., "Automated generation of interactive 3D exploded view diagrams". *ACM Transactions on Graphics (TOG) - Proceedings of ACM SIGGRAPH 2008*, **27**, 1-7, 2008.

SOBRE O AUTOR

Adérito Araújo é professor associado no Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra e membro do grupo de Análise Numérica e Otimização do Centro de Matemática da Universidade de Coimbra. Os seus interesses científicos incluem o desenvolvimento de modelos matemáticos e numéricos em aplicações biomédicas, mantendo colaboração ativa com engenheiros, médicos, físicos e químicos em múltiplos projetos de cariz interdisciplinar. Ao longo da sua carreira, tem exercido cargos diretivos em várias associações científicas nacionais e internacionais, sendo atualmente membro da direção da Rede Portuguesa de Matemática para a Indústria e Inovação (PT-MATHS-IN) e das direções executivas do ECMI (European Consortium for Mathematics in Industry) e da EU-MATHS-IN (European Service Network of Mathematics for Industry and Innovation).

Secção coordenada pela PT-MATHS-IN, Rede Portuguesa de Matemática para a Indústria e Inovação

pt-maths-in@spm.pt