RICARDO MAMEDE
Universidade
de Coimbra
mamede@mat.uc.pt

A FUNÇÃO *W* DE LAMBERT

A função *W* de Lambert foi considerada pela primeira vez há mais de 250 anos, mas apenas recentemente foi batizada e objeto de um tratamento rigoroso. Está intimamente relacionada com a função logaritmo e tem uma grande variedade de aplicações em matemática, física e ciências da computação, surgindo em muitos problemas de modelação nas ciências naturais. Neste canto vamos usar a função *W* de Lambert para resolver algumas equações transcendentes.

1.INTRODUÇÃO

Algumas equações que dependem de uma única variável x podem ser manipuladas de forma a que a variável apareça isolada num dos membros da equação. Quando isto é possível, dizemos que resolvemos a equação. Por exemplo, a equação $x^2 + 2x - 3 = 0$ tem duas soluções $x = -3$ e $x = 1$, que podem ser obtidas usando a fórmula resolvente para equações quadráticas. A situação é diferente quando somos confrontados com equações da forma

$$x^x = 2$$

ou

$$x + e^x = 2.$$

Estas equações não possuem soluções algébricas em termos de "funções elementares" que, em termos gerais, consistem em funções polinomiais, racionais, trigonométricas, exponenciais ou logaritmos, e funções obtidas destas por aplicação de um número finito de operações elementares: soma, subtração, multiplicação, divisão, composição e radiciação. Uma equação da forma $x = f(x)$ que não possui solução algébrica diz-se uma equação transcendente.

O facto de uma equação transcendente não ter solução algébrica, não significa que não tenha solução. Vamos ver neste canto que se adicionarmos ao nosso repertório de funções a função *W* de Lambert vamos ser capazes de resolver de forma simples algumas equações transcendentes.

A função *W* de Lambert deve o seu nome a Johann Heinrich Lambert (1728-1777), matemático, físico e astrónomo suíço que, entre muitos outros resultados, é reconhecido como o primeiro matemático a apresentar uma prova rigorosa da irracionalidade do número π.

Figura 1. J. H. Lambert.

A história da função *W* começa em 1758 quando Lambert estudou a equação trinomial

$$x = q + x^m,$$

mas é num artigo publicado por Euler (1707-1783) que aparece a primeira menção da função inversa de $y = xe^x$. No entanto, Euler concede o crédito a Lambert pelo seu trabalho pioneiro nesta função. Todavia, só no final do século XX é que a função W começou a ser designada por função de Lambert e a letra W foi escolhida na primeira implementação da função W no software matemático Maple. Entretanto, uma grande variedade de aplicações da função W foi descoberta, quer em matemática, quer em física ou em ciências da computação [1, 3]. A função W de Lambert surge ainda associada a vários modelos nas ciências naturais [7], permitindo obter soluções em forma fechada para problemas cuja solução exata ou explícita não é possível de obter usando funções elementares.

2. DEFINIÇÃO

A função W de Lambert define-se como sendo a inversa da função

$$y = xe^x.$$

O número e nesta fórmula representa o número de Euler, uma das constantes mais famosas da matemática. Podemos definir o número de Euler como sendo o limite da sucessão $(1 + 1/n)^n$ quando n tende para infinito. Por exemplo, tomando $n = 1.000.000$, obtemos o valor $e \approx 2,718280469\cdots$, com cinco casas decimais corretas.

Antes de analisarmos a função W, vamos debruçar-nos sobre a função exponencial $y = e^x$. Esta função é crescente para todo o x real e tem por contradomínio o conjunto dos números reais positivos. É, portanto, invertível e a sua inversa é o logaritmo natural $\ln x$, cujo gráfico pode ser obtido a partir do gráfico da função exponencial refletindo-o sobre a diagonal $y = x$ (ver figura 2). Por definição de função inversa, temos portanto,

$$x = e^{\ln x} \qquad \text{para } x > 0$$

e

$$x = \ln(e^x) \qquad \text{para } x \in \mathbb{R}.$$

Estas relações podem ser usadas para resolver algumas equações que envolvem a função exponencial. Por exemplo, aplicando o logaritmo natural a ambos os membros da equação $e^x = 2$ obtemos a sua única solução $x = \ln 2 \approx 0,6931$.

Foquemos agora a nossa atenção na função W. A função $y = xe^x$ está definida para todo o número real x e tem por contradomínio o conjunto dos números $y \geq -1/e \approx -0,3679$. Esta função tem derivada $y' = (x + 1)e^x$, a qual é negativa para $x < -1$ e positiva para $x > -1$. Segue-se que $y = xe^x$ é decrescente para $x \leq -1$ (curva vermelha na figura 3) e é crescente para $x \geq -1$ (curva azul na figura 3).

Portanto, ao contrário do que ocorre com a função exponencial, a função xe^x não é invertível sobre o seu domínio. No entanto, se restringirmos o domínio da função ao conjunto $[-1, +\infty)$, onde xe^x é crescente, ou ao conjunto $(-\infty, -1]$, onde xe^x é decrescente, a função xe^x é invertível e à sua inversa chamamos função W de Lambert. A inversa de xe^x quando restrita ao conjunto $[-1, +\infty)$ é designada por ramo principal da função W de Lambert e denotada por W_0 (curva sólida na figura 3). Ou seja,

$$W_0 : [-e^{-1}, +\infty) \to [-1, +\infty)$$

é a inversa de xe^x no conjunto $[-1, +\infty)$.

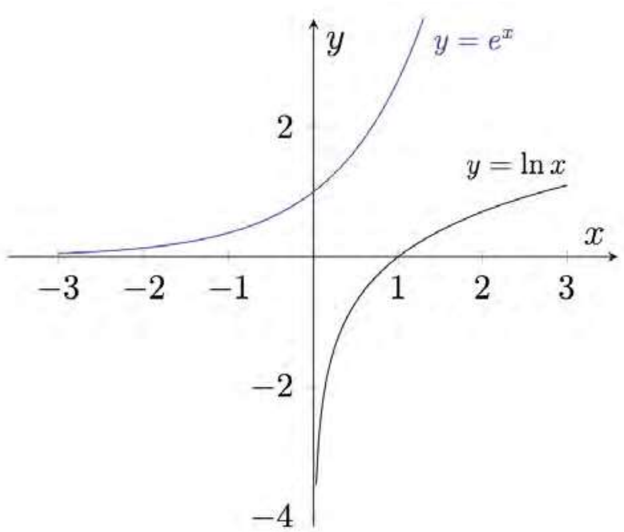

Figura 2. Gráficos de $y=e^x$ e $y=\ln x$.

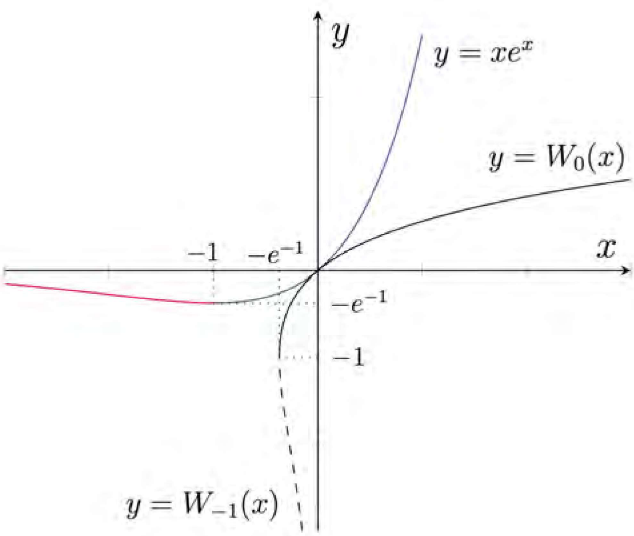

Figura 3. Gráficos de $y=xe^x$ e dos dois ramos de $W(x)$.

Por outro lado, a inversa de xe^x quando restrita ao conjunto $(-\infty, -1]$ é designada ramo secundário da função W de Lambert e denotada por W_{-1} (curva a tracejado na figura 3). Ou seja,

$$W_{-1} : [-e^{-1}, 0] \to (-\infty, -1],$$

é a inversa de xe^x no conjunto $(-\infty, -1)$.

Há, portanto, duas funções de Lambert, o ramo principal $W_0(x)$ definido para $x \geq -e^{-1}$ com $W_0(x) \geq -1$, e o ramo secundário $W_{-1}(x)$ definido para $-e^{-1} \leq x \leq 0$ com $W_{-1}(x) \leq -1$. Assim, a equação $y = xe^x$ possui uma única solução se $x \geq 0$ e duas soluções se $-e^{-1} < x < 0$.

Quando não for necessário distinguir entre os dois ramos, escrevemos apenas $W(x)$ para denotar a função W de Lambert, e usaremos os índices 0 e -1 quando uma certa afirmação se verificar apenas para um dos ramos.

Por definição de função inversa, temos portanto

$$W(xe^x) = x, \text{ para } x \geq -1$$

e

$$W(x)e^{W(x)} = x, \text{ para } x \geq -e^{-1}.$$

A definição da função W pode ser algo difícil de usar pois apresenta-a de forma implícita e não nos fornece, portanto, uma forma fechada para $W(x)$. Em geral teremos de recorrer a métodos numéricos [8] ou a um sistema de álgebra computacional (como, por exemplo, *Maple*, MATLAB ou *Mathematica*) para calcular o valor de $W(x)$. No entanto, este condicionamento não é maior do que aquele que experienciamos ao calcular o valor de e^2 ou $\ln 2$. Também nestes casos geralmente recorremos a uma calculadora para obter um valor aproximado para estes números. A grande diferença no cálculo de $\ln 2$ e $W(2)$ reside no facto de a maioria das calculadoras possuírem botões dedicados à função logaritmo natural, mas não fazerem em geral referência à função W.

Os cálculos efetuados neste artigo foram realizados usando o software Wolframalpha (*https://www.wolframalpha.com*), de acesso livre online, que usa o sistema de álgebra computacional Mathematica. Neste sistema, a função W é implementada usando o nome *ProductLog*.

Ainda assim, alguns valores da função W de Lambert são fáceis de obter usando a condição $W(xe^x) = x$, como, por exemplo:

$$W(-1/e) = W(-1 \cdot e^{-1}) = -1,$$
$$W(0) = W(0 \cdot e^0) = 0,$$
$$W(e) = W(1 \cdot e^1) = 1,$$
$$W(2\ln(2)) = W\left(\ln(2) \cdot e^{\ln 2}\right) = \ln 2.$$

As principais propriedades da função W, incluindo a sua derivada, primitiva e expansão em série de potências, podem ser encontradas em [2, 3, 4].

3. EQUAÇÕES TRANSCENDENTES

Vamos agora determinar as soluções de algumas equações transcendentes usando a função W. A estratégia geral é escrever a equação na forma $a = be^b$, donde se segue que $b = W(a)$ por definição da função W.

- $\mathbf{x^x = 2}$

Aplicando o logaritmo natural a ambos os membros desta equação, obtemos

$$\ln 2 = \ln(x^x) = x \ln x.$$

A mudança de variável $z = \ln x$ permite escrever a identidade anterior na forma $\ln 2 = ze^z$, donde se segue que $z = W(\ln 2)$, ou seja,

$$x = e^{W(\ln 2)} \approx 1,5596.$$

A mesma ideia pode ser usada para determinar a inversa da função $f(x) = x^x$, para $x > 0$. Temos $x^x \to 1$ quando $x \to 0^+$ e $x^x \to +\infty$ quando $x \to +\infty$ (ver figura 4). Como $f'(x) = (1 + \ln x)x^x$, o ponto $(e^{-1}, e^{-1/e})$ é um mínimo absoluto de f. A função é decrescente no intervalo $(0, e^{-1}]$ e crescente no intervalo $[e^{-1}, +\infty)$ e, portanto, para definirmos a sua inversa vamos restringir o seu domínio a um destes intervalos.

Qualquer que seja a restrição feita ao domínio, podemos repetir os passos usados na resolução da equação

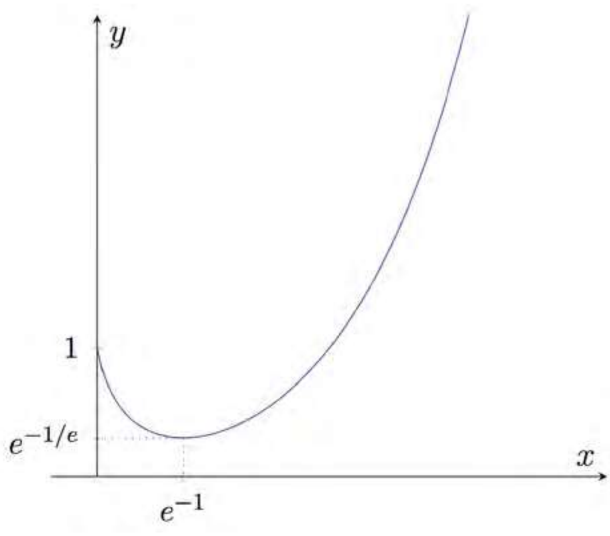

Figura 4. Gráfico de $y=x^x$.

$x^x = 2$ para obter uma expressão para a inversa de x^x. Começamos por aplicar o logaritmo natural a ambos os membros da igualdade $y = x^x$, obtendo

$$\ln y = x \ln x.$$

A mudança de variável $z = \ln x$ permite obter $\ln y = ze^z$, donde se segue que

$$x = e^{W(\ln y)}.$$

Ou seja, a inversa da função $y = x^x$ é a função $f^{-1}(x) = e^{W(\ln x)}$.

- $\mathbf{x+e}^x = 2$

A função $y = x + e^x$ é crescente para todo o x real, uma vez que a sua derivada satisfaz $y' = 1 + e^x > 0$ para todo o x. Como se verifica

$$\lim_{x\to\pm\infty} x + e^x = \pm\infty,$$

facilmente se deduz que a equação $x + e^x = 2$ tem uma única solução real. Para a obtermos, começamos por tomar a exponencial em ambos os membros:

$$e^2 = e^{x+e^x} = (e^x)\, e^{(e^x)}.$$

Segue-se que $e^x = W(e^2)$, isto é a única solução da equação $x + e^x = 2$ é dada por

$$x = \ln(W(e^2)) \approx 0,4428.$$

- $\mathbf{x - e^x = -2}$

A função $y = x - e^x + 2$ tem por derivada $y' = 1 - e^x$, que se anula no ponto $x = 0$. O ponto (0, 1) é pois um máximo absoluto de y uma vez que esta função é crescente no intervalo $(-\infty, 0]$ e decrescente no intervalo $[0, +\infty)$. Como

$$\lim_{x\to\pm\infty} x - e^x + 2 = -\infty,$$

segue-se que a equação $x - e^x = -2$ tem exatamente duas soluções reais. Para as obtermos, procedemos como no exemplo anterior: começamos por tomar exponenciais em ambos os membros da equação,

$$e^{-2} = e^{x-e^x} = (e^x)\, e^{(-e^x)},$$

ou seja

$$-e^{-2} = (-e^x)\, e^{(-e^x)}.$$

A solução pode agora ser obtida por aplicação da função W, $-e^x = W(-e^{-2})$. Notemos no entanto, que uma vez que $-e^{-1} < -e^{-2} < 0$, obtemos as duas soluções pretendidas aplicando os dois ramos da função W:

$$x = \ln\left(-W_0(-e^{-2})\right) \approx -1,8414$$

e

$$x = \ln\left(-W_{-1}(-e^{-2})\right) \approx 1,1462.$$

- $\mathbf{\sqrt{x} + \ln x = 0}$

A função $y = \sqrt{x} + \ln x$ está definida para $x > 0$ e é crescente neste intervalo, uma vez que a sua derivada satisfaz $y' = (\sqrt{x} + 2)/2x > 0$ para $x > 0$. Temos

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} + \ln x = -\infty,$$

e

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x} + \ln x = +\infty,$$

donde se conclui que a equação $\sqrt{x} + \ln x = 0$ tem uma única solução real. Para a obtermos, comecemos por escrever $\ln x = -\sqrt{x}$ ou ainda

$$-\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 1.$$

Multiplicando ambos os membros desta igualdade por 1/2 e usando propriedades do logaritmo, obtemos

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{x}} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) e^{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)},$$

donde se segue que

$$\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = W(1/2),$$

ou seja,

$$x = e^{-2W(1/2)} \approx 0,4948.$$

- $\mathbf{x^n = e^{-x}}$

Uma equação da forma $x^n = e^{-x}$, com n um inteiro positivo, pode ser reescrita como

$$x^n e^x = 1.$$

Extraindo a raiz índice n, vem

$$xe^{x/n} = 1,$$

que pode ser escrito como

$$be^b = 1/n,$$

com $b = x/n$. Portanto, uma solução real da equação $x^n = e^{-x}$ é dada por

$$x = nW\,(1/n)\,.$$

- $\mathbf{2^x = 3x}$

A função $y = 2^x - 3x$ tem domínio $\mathbb{R}$ e a sua derivada $y' = 2^x(\ln 2) - 3$ anula-se apenas no ponto $x_0 = \ln(3/\ln(2))/\ln 2 \approx 2,1137$. Uma vez que

$$\lim_{x\to\pm\infty} 2^x - 3x = +\infty,$$

o ponto $(x_0, 2^{x_0} - 3x_0) \approx (2,1137; -2,0131)$ é um mínimo absoluto da função $2^x - 3x$. Segue-se que a equação $2^x = 3x$ possui duas soluções reais. Para as obtermos, comecemos por escrever a equação na forma

$$1 = \frac{3x}{2^x} = 3xe^{-x\ln 2}.$$

Multiplicando ambos os membros da equação por $-(\ln 2)/3$, obtemos

$$-\frac{1}{3}\ln 2 = -(x\ln 2)e^{-x\ln 2},$$

donde se segue que

$$-x\ln 2 = W\left(-\tfrac{1}{3}\ln 2\right).$$

Como $-e^{-1} < -\frac{1}{3}\ln 2 < 0$, podemos usar os dois ramos da função W para obter as duas soluções da equação,

$$x = \frac{W_0\left(-\frac{1}{3}\ln 2\right)}{-\ln 2} \approx 0,4578$$

e

$$x = \frac{W_{-1}\left(-\frac{1}{3}\ln 2\right)}{-\ln 2} \approx 3,3132.$$

O leitor encontra em [5] uma grande variedade de equações construídas através de combinações de logaritmos, exponenciais e polinómios cuja solução explicita pode ser encontrada usando a função W de Lambert.

4. A TORRE DE POTÊNCIAS INFINITA

Outra aplicação interessante da função W envolve a torre infinita de expoentes

$$y(x) = x^{x^{x^{\cdot^{\cdot}}}}$$

Esta função, também conhecida como tetração, pode ser definida iterativamente por

$$y_1 = x \quad \text{e} \quad y_{n+1} = x^{y_n}.$$

Este processo gera uma sequência infinita de aproximações para $y(x)$. Euler provou (veja-se [6]) que a sucessão (y_n) converge quando

$$0,0659 \approx e^{-e} \leq x \leq e^{1/e} \approx 1,4446.$$

Vamos usar a função W para calcular o valor de $y(x)$ quando x pertence a este intervalo.

Neste caso, podemos escrever $y = x^y$, ou seja, $x = y^{1/y}$. Aplicando o logaritmo natural a ambos os membros desta última equação, obtemos

$$\ln x = \frac{\ln y}{y},$$

ou ainda,

$$y\ln x = \ln y.$$

Segue-se que $y = e^{y\ln x}$. Podemos escrever esta última igualdade como

$$-y\ln(x)e^{-y\ln(x)} = -\ln x$$

e pela definição da função W, temos

$$-y\ln x = W(-\ln x),$$

ou seja, obtemos a expressão

$$y = \frac{W(-\ln x)}{-\ln x},$$

para a torre de potências infinita em termos da função W de Lambert.

REFERÊNCIAS

[1] R.M. Corless, G.H. Gonnet, D.E.G. Hare, D.J. Jeffrey and D.E. Knuth (1996), "On the Lambert W function", *Adv. Comput. Math.* **5** (1996), n. 4, 329-359.

[2] R.M. Corless, D.J. Jeffrey and D.E. Knuth (1997), "A sequence of series for the Lambert W function", *In Procceedings of* ISSAC'97, 197-204.

[3] R.M. Corless, D.J. Jeffrey and S.R. Valluri (2000), *Some applications of the Lambert W function to physics*, Can. J. Phys. 78, 823-831.

[4] T.P. Dence (2013), "A Brief Look into the Lambert W Function", *Applied Maths.* 4, 887-892.

[5] S. Edwards (2019), *Extension of Algebraic Solutions Using The Lambert W Function*, arXiv:1902.08910.

[6] R.A. Knoebel (1981), "Exponentials Reiterated", *The American Mathematical Monthly* Vol. 88 (4), 235-252.

[7] J. Lehtonen (2016), "The Lambert *W* function in ecology and evolutionary models", *Methods in Ecology and Evolution* 7, 1110-1118.

[8] D. Veberic (2010), "Having Fun with Lambert $W(x)$ Function", arXiv:1003.1628.