SIMPLIFICAÇÃO DE RADICAIS

António Pereira Rosa
Escola Secundária de Camões
antoniopereirarosa@gmail.com

A simplificação de radicais duplos, estudada no Ensino Secundário nos anos 60 do século passado, caiu no esquecimento até ao surgimento das Metas Curriculares, reaparecendo então na forma de exercícios. Neste artigo procuramos ir um pouco mais além, apresentando a teoria subjacente a essas simplificações, bem como exemplos de aplicação. Terminamos com um exemplo devido a Pedro Nunes, que resultou da sua análise de algumas peculiaridades da fórmula de Cardan-Tartaglia para a equação do terceiro grau.

1. INTRODUÇÃO

Ao estudarmos as operações com radicais, constatamos imediatamente que há uma grande diferença entre a multiplicação e a adição. Mesmo que só consideremos raízes quadradas, tem-se que $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ mas é, em geral, falso que $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ para dois números não negativos a e b. Neste trabalho vamos tentar elucidar as relações entre o radical de uma soma e a soma dos radicais, bem como a questão da simplificação de radicais quadráticos da forma $\sqrt{A+\sqrt{B}}$. No final, falaremos um pouco sobre a simplificação de radicais de índice mais elevado. Não consideraremos a simplificação de expressões relacionadas com produtos e quociente de radicais, uma vez que estes processos são sobejamente conhecidos a nível do Ensino Secundário.

2. SIMPLIFICAÇÃO DE RADICAIS QUADRÁTICOS

Quanto ao primeiro tema, temos o seguinte resultado, já conhecido dos matemáticos hindus e árabes (veja-se [10]), e que está perfeitamente ao alcance dos alunos do 10.º ano:

Proposição 1: Sejam a e b dois números não negativos. Então, $\sqrt{a}+\sqrt{b} = \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}$.

Demonstração:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} = \sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} = \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}.$$

Nota: Decorre imediatamente da fórmula anterior que $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b}$ e que $\sqrt{a+b} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$ se e só se pelo menos um dos números a ou b for zero.

Nos manuais escolares do 10.º ano, surgem frequentemente exercícios em que se pretendem provar igualdades como

$$\sqrt{14+6\sqrt{5}} = 3+\sqrt{5},$$

que são consideradas de dificuldade elevada e que, na nossa experiência, deixam os alunos perplexos.

Comecemos por analisar a decomposição acima indicada, por meio de dois processos distintos.

1.º processo:

$$\sqrt{14+6\sqrt{5}} = \sqrt{9+6\sqrt{5}+5} = \sqrt{(3+\sqrt{5})^2} = 3+\sqrt{5}.$$

O artifício foi escrever o número 14 como soma de duas parcelas, sendo uma um quadrado perfeito e recorrer ao caso notável da multiplicação "quadrado de uma soma".

2.º processo: Tentemos determinar dois números x e y (racionais ou, se possível, inteiros) tais que $\sqrt{14+6\sqrt{5}} = \sqrt{x}+\sqrt{y}$; elevando ao quadrado ambos os membros desta igualdade, vem $14+6\sqrt{5} = (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$. Após simplificações, chegamos a $14+6\sqrt{5} = x+y+2\sqrt{xy}$ donde obtemos o sistema[1]

$$\begin{cases} x+y=14 \\ 6\sqrt{5} = 2\sqrt{xy}. \end{cases}$$

Se elevarmos ambos os membros da segunda equação ao quadrado e simplificarmos, chegamos a

$$\begin{cases} x+y=14 \\ xy=45 \end{cases},$$

que tem as soluções[2] (9, 5) e (5, 9). Em qualquer dos casos, obtemos $\sqrt{14+6\sqrt{5}} = \sqrt{9}+\sqrt{5} = 3+\sqrt{5}$, em concordância com o resultado do primeiro processo.

[1] Ver a demonstração da proposição 2 para a justificação da passagem da equação ao sistema.

[2] Uma alternativa interessante à resolução do sistema por substituição é o recurso às fórmulas que dão a soma e o produto das raízes duma equação quadrática, um tópico infelizmente esquecido no atual Ensino Secundário. No caso em estudo, basta considerar a equação $x^2-14x+45=0$ para se obterem imediatamente os resultados indicados; veja-se a demonstração da proposição 2.

No que se segue, analisaremos com cuidado este segundo processo e obteremos condições necessárias e suficientes para a possibilidade da decomposição e uma fórmula geral para a efetuar, um assunto que era estudado a nível do Ensino Secundário ainda nos anos 60 do século passado (ver, por exemplo, [9]).

A necessidade de uma análise cuidadosa torna-se evidente se considerarmos o radical $\sqrt{14-6\sqrt{5}}$; se, por analogia com o caso $\sqrt{14+6\sqrt{5}}$, tentarmos escrevê-lo na forma $\sqrt{x}-\sqrt{y}$, somos levados de novo ao sistema

$$\begin{cases} x+y=14 \\ xy=45 \end{cases}$$

e obtemos, além da igualdade verdadeira

$$\sqrt{14-6\sqrt{5}}=3-\sqrt{5},$$

o resultado incorreto $\sqrt{14-6\sqrt{5}}=\sqrt{5}-3$.

Notemos que decomposições deste género nem sempre são possíveis. Por exemplo, é impossível escrever $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ como soma das raízes quadradas de dois números naturais; basta reparar que $\sqrt{1+\sqrt{2}}<1,6$ e que, dados dois números naturais quaisquer a e b, se tem que $\sqrt{a}+\sqrt{b}\geq 2$.

Antes de estudarmos a simplificação de radicais da forma $\sqrt{A+\sqrt{B}}$, notemos que é indiferente considerar radicais nesta forma ou na forma $\sqrt{a+b\sqrt{q}}$, pois as duas são obviamente equivalentes, desde que $b\geq 0$.

A seguinte proposição esclarece em que condições se pode escrever um radical duplo da forma $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ como soma de dois radicais simples. Comecemos por uma definição.

Definição 1: Um número racional positivo A diz-se um *quadrado perfeito* se existir um número racional B tal que $B^2=A$.

Proposição 2: Dados dois números racionais positivos A e B, não sendo B um quadrado perfeito, existem dois números racionais x e y tais que $\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ se e só se A^2-B for um quadrado perfeito.

Nota: Comecemos por reparar que se B fosse um quadrado perfeito, o radical duplo reduzir-se-ia trivialmente a um radical simples, daí que esta hipótese seja logo descartada no enunciado.

Demonstração: A equação $\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ é equivalente à equação $(\sqrt{A+\sqrt{B}})^2=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$, já que os seus membros são ambos positivos. Desenvolvendo os cálculos, vem que

$$A+\sqrt{B}=x+y+2\sqrt{xy},$$

ou ainda

$$2\sqrt{xy}=A-x-y+\sqrt{B}. \tag{1}$$

Mediante uma nova elevação ao quadrado, chegamos a

$$4xy=(A-x-y)^2+B+2(A-x-y)\sqrt{B}. \tag{2}$$

Concluímos então que

$$A-x-y=0 \tag{3}$$

pois se assim não fosse, resultaria de (1) que

$$\sqrt{B}=\frac{4xy-(A-x-y)^2-B}{2(A-x-y)},$$

o que é absurdo, pois o primeiro membro desta igualdade é um número irracional e o segundo membro um número racional. Assim, de (3) vem que

$$x+y=A \tag{4}$$

Por substituição de (4) em (1), resulta, após elevação ao quadrado de ambos os membros, que

$$xy=\frac{B}{4}. \tag{5}$$

Atendendo a (4) e (5), podemos, recorrendo às fórmulas referidas na nota 2, determinar os valores de x e y: são as soluções da equação

$$X^2-AX+\frac{B}{4}=0, \tag{6}$$

que são $\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}$ e $\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}$. Basta então escolher um destes valores para x e o outro será o correspondente valor de y. Como x e y devem ser racionais, a expressão A^2-B tem de ser um quadrado perfeito.

Reciprocamente, se a expressão A^2-B for um quadrado perfeito, o número $C=\sqrt{A^2-B}$ é racional, o mesmo sucedendo com os números

$$\frac{A+C}{2} \text{ e } \frac{A-C}{2},$$

que são as soluções da equação (6). Estes dois números são as únicas soluções possíveis de (1) e logo de $\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$, pois estas equações são equivalentes.

Observação: Se considerarmos agora a igualdade $\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$, verificamos que as considerações anteriores se podem aplicar, desde que tomemos $x=\frac{A+C}{2}$ e $y=\frac{A-C}{2}$ para que a diferença

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{\frac{A+C}{2}}-\sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

seja positiva, já que o radical $\sqrt{A-\sqrt{B}}$ que lhe é igual, é positivo.

Em resumo, temos o seguinte resultado:

Teorema 1. Dados dois números racionais positivos A e B, não sendo B um quadrado perfeito, existem dois números racionais x e y tais que $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$ se e só se $A^2 - B$ for um quadrado perfeito.

Exemplos e aplicações:
1) Os dois exemplos dados anteriormente tornam-se triviais à luz deste teorema. Com efeito,

- $$\begin{aligned}\sqrt{14+6\sqrt{5}} &= \sqrt{14+\sqrt{180}} = \\ &= \sqrt{\frac{14+4}{2}} + \sqrt{\frac{14-4}{2}} = \\ &= \sqrt{9} + \sqrt{5} = 3 + \sqrt{5},\end{aligned}$$

  como se reconhece imediatamente; pondo $A = 14$ e $B = 180$, vem $A^2 - B = 16 = 4^2$ e podemos tomar $C = 4$.

- $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ não pode ser simplificado pois $A^2 - B = 1^2 - 2 = -1$ não é um quadrado perfeito.

2) A equação biquadrada
Recordemos que se chama equação biquadrada a uma equação da forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$, com $a \neq 0$. Estas equações resolvem-se facilmente recorrendo à substituição $y = x^2$:

$$\begin{aligned}&ax^4 + bx^2 + c = 0 \Leftrightarrow ay^2 + by + c = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Leftrightarrow x^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.\end{aligned}$$

Esta última expressão mostra a utilidade do teorema 1 no estudo destas equações.

Por exemplo, se considerarmos a equação $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$, a aplicação da fórmula anterior leva-nos a $x = \pm\sqrt{5 \pm \sqrt{24}}$; como $A^2 - B = 5^2 - 24 = 1$, podemos considerar $C = 1$ e obtemos as quatro soluções numa forma muito mais "simpática":

$$\begin{aligned}x = \sqrt{3} + \sqrt{2} \vee x = \sqrt{3} - \sqrt{2} \vee \\ \vee x = -\sqrt{3} + \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{3} - \sqrt{2}.\end{aligned}$$

3) Um problema de trigonometria
Um exercício clássico em trigonometria é a obtenção das razões trigonométricas de alguns ângulos, a partir das razões dos ângulos de amplitudes 30º, 45º e 60º. Por exemplo,

$$\begin{aligned}\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) &= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \operatorname{sen} 45^\circ \operatorname{sen} 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 15^\circ = \operatorname{sen}(45^\circ - 30^\circ) &= \operatorname{sen} 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \operatorname{sen} 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Vejamos o que sucede se, tendo obtido cos 15º, experimentarmos calcular sen 15º por outra via, recorrendo à fórmula fundamental da trigonometria:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 15^\circ = +\sqrt{1-\cos^2 15^\circ} &= \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \\ &= \sqrt{1 - \frac{8+2\sqrt{12}}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{8-\sqrt{48}},\end{aligned}$$

valor este que parece ser completamente diferente do primeiro!

Naturalmente, os dois valores são iguais: se aplicarmos ao radical duplo $\sqrt{8-\sqrt{48}}$ o método de simplificação do teorema 1 com $A = 8$ e $B = 48$, verifica-se imediatamente que podemos considerar $C = 4$ e então

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\sqrt{8-\sqrt{48}} &= \frac{1}{4}\left[\sqrt{\frac{8+4}{2}} - \sqrt{\frac{8-4}{2}}\right] = \\ &= \frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

4) Simplificação de algumas expressões mais complicadas

a) A expressão $\sqrt{5\sqrt{7}+2\sqrt{42}}$ não está nas condições do teorema 1, mas pode ser simplificada se admitirmos o uso de raízes de índice quatro. Com efeito,

$$\sqrt{5\sqrt{7}+2\sqrt{42}} = \sqrt{\sqrt{7}}\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt[4]{7}\sqrt{5+\sqrt{24}}$$

e, por aplicação do teorema 1, obtemos finalmente

$$\sqrt{5\sqrt{7}+2\sqrt{42}} = \sqrt[4]{7}(\sqrt{3}+\sqrt{2}).$$

b) A expressão $\sqrt{5+\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15}}$ pode ser simplificada recorrendo ao teorema 1 (e a alguma engenhosidade...). Para tanto, reparemos que um raciocínio análogo ao utilizado na prova do teorema 1 leva à fórmula

$$\sqrt{A \pm B} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B^2}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B^2}}{2}}$$

onde A e B são números positivos e $A > B$.

Se fizermos $A = 5 + \sqrt{10}$ e $B = \sqrt{6} + \sqrt{15}$, vem

$$\sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B^2}}{2}} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{10} + \sqrt{(5 + \sqrt{10})^2 - (\sqrt{6} + \sqrt{15})^2}}{2}} =$$
$$= \sqrt{\frac{5 + \sqrt{10} + \sqrt{14 + 4\sqrt{10}}}{2}} =$$
$$= \sqrt{\frac{5 + \sqrt{10} + 2 + \sqrt{10}}{2}} =$$
$$= \sqrt{\frac{7}{2} + \sqrt{10}} = 1 + \frac{\sqrt{10}}{2},$$

por aplicação do teorema 1 aos radicais $\sqrt{14 + 4\sqrt{10}}$ e $\sqrt{\frac{7}{2} + \sqrt{10}}$.

Analogamente, chega-se a

$$\sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B^2}}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}};$$

neste caso nem sequer é preciso aplicar o teorema 1.

A simplificação desejada é então

$$\sqrt{5 + \sqrt{6} + \sqrt{10} + \sqrt{15}} = 1 + \sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Podem encontrar-se muitos outros exemplos e exercícios de simplificações deste género em [3].

3. RADICAIS DE ÍNDICE SUPERIOR

O estudo das simplificações destes radicais é muito mais difícil; na década de 90 do século passado foi apresentado o primeiro algoritmo geral para este problema pela matemática americana Susan Landau (ver [7] ou [8]) e ainda subsistem muitos problemas em aberto. No que se segue, limitar-nos-emos a alguns exemplos, essencialmente de caráter histórico sobre radicais do tipo $\sqrt[3]{a + b\sqrt{q}}$. Este tipo de radicais surge naturalmente a propósito da fórmula de Cardan-Tartaglia para a resolução de equações do terceiro grau (ver, por exemplo, [2] ou [6]) : se $x^3 + px + q = 0$ então

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

desde que as raízes cúbicas sejam escolhidas de modo a que o seu produto seja igual a $-p/3$.

Por volta de 1540 e motivado pela fórmula referida, Tartaglia chegou ao resultado que a seguir apresentamos, em linguagem e notação modernas ([10]).

Teorema 2. Sejam a e b dois números racionais, não sendo b um quadrado perfeito e tais que $\sqrt[3]{a + \sqrt{b}}$ é irracional. Se:

1) $\sqrt[3]{a^2 - b}$ for racional;

2) a equação $4x^3 - 3\sqrt[3]{a^2 - b}x = a$ tiver uma solução racional, então existem dois números racionais u e v tais que $\sqrt[3]{a + \sqrt{b}} = u + \sqrt{v}$.

Demonstração: Supondo que

$$\sqrt[3]{a + \sqrt{b}} = u + \sqrt{v}, \tag{7}$$

segue-se, por elevação ao cubo de ambos os membros, que

$$a + \sqrt{b} = u^3 + 3uv + \left(3u^2 + v\right)\sqrt{v}$$

donde, atendendo a que a e b são números racionais, segue-se que

$$\begin{cases} a = u^3 + 3uv \\ \sqrt{b} = (3u^2 + v)\sqrt{v}. \end{cases}$$

Se subtrairmos a segunda equação da primeira, obtemos $a - \sqrt{b} = (u - \sqrt{v})^3$; extraindo a raiz cúbica de ambos os membros, resulta que

$$\sqrt[3]{a - \sqrt{b}} = u - \sqrt{v}. \tag{8}$$

Multipliquemos membro a membro as igualdades (7) e (8); vem que $\sqrt[3]{a^2 - b} = u^2 - v$ e, portanto $v = u^2 - \sqrt[3]{a^2 - b}$. Se substituirmos este valor na primeira equação do sistema, chegamos a

$$a = 4u^3 - 3\left(\sqrt[3]{a^2 - b}\right)u,$$

equação esta que, por hipótese, tem uma raiz racional u. Basta então considerar $v = u^2 - \sqrt[3]{a^2 - b}$, que é racional, pela hipótese 1), e obtemos $\sqrt[3]{a + \sqrt{b}} = u + \sqrt{v}$ e $\sqrt[3]{a - \sqrt{b}} = u - \sqrt{v}$, o que conclui a prova.

Vejamos um exemplo deste método tão engenhoso, simplificando a expressão $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$. Tem-se que $a = 2$, $b = \sqrt{5}$ e $\sqrt[3]{2^2 - 5} = -1$; a equação auxiliar é $4x^3 + 3x - 2 = 0$, que tem a raiz racional $1/2$ [3].

Segue-se que

$$u = \frac{1}{2}, v = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \sqrt[3]{-1} = \frac{5}{4}$$

e

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

o conhecido *número de ouro*.

Para concluir, apresentaremos um exemplo de simplificação de radicais cúbicos devido a Pedro Nunes, que é descrito em [4]. Se aplicarmos à equação $x^3+6x=20$ a fórmula de Cardan-Tartaglia, vem $x=\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$ [4]. No *Libro de Algebra en Arithmetica e Geometria* (publicado em 1567, mas composto cerca de 30 anos antes), Pedro Nunes utiliza esta equação para apontar algumas peculiaridades da fórmula de Cardan-Tartaglia, sem pôr em causa a sua correção. É que esta expressão tão complicada "esconde" a solução 2 da equação em causa!

Pedro Nunes, talvez por tentativas ou motivado pela igualdade $\sqrt{108}=6\sqrt{3}$, reparou que $\sqrt{108}+10$ é o cubo de uma certa expressão, a saber $\sqrt{3}+1$, como se verifica imediatamente:

$$\begin{aligned}(\sqrt{3}+1)^3 &= \sqrt{3}^3+{}^3C_1\sqrt{3}^2+{}^3C_2\sqrt{3}+1^3\\ &= 3\sqrt{3}+9+3\sqrt{3}+1\\ &= 10+6\sqrt{3}=10+\sqrt{108},\end{aligned}$$

donde a simplificação $\sqrt[3]{10+\sqrt{108}}=\sqrt{3}+1$.

Analogamente se obtém $\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}=\sqrt{3}-1$. Combinando as duas simplificações, Pedro Nunes chegou à surpreendente igualdade

$$\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}=\sqrt{3}+1-(\sqrt{3}-1)=2.$$ [5]

Deixamos ao cuidado do leitor obter os resultados de Pedro Nunes recorrendo ao teorema 2.

4. REFERÊNCIAS

[1] Borodin, A., Fagin, R., Hopcroft, J. e Tompa, M. "Decreasing the Nesting Depth of Expressions Involving Square Roots", *Journal of Symbolic Computation*, 1, 1985.

[2] Brison, O. W. *Teoria de Galois* (4ª. ed.), Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências de Lisboa, 2003.

[3] Chrystal, G. Algebra: *An Elementary Text-Book (part 1)*, Adam and Charles Black, 1904.

[4] Estrada, M. F., Sá, C. C., Queiró, J. F., Silva, M. C. e Costa, M. J. *História da Matemática*, Universidade Aberta, 2000.

[5] Gkioulekas, E. "On the Denesting of Nested Square Roots", *International Journal of Mathematical Education*, nº 48, 2017.

[6] Kurosh, A. *Cours d'Algèbre Supérieure*, Editions Mir, 1973.

[7] Landau, S., "Simplification of Nested Radicals", *SIAM J. Comput* 21 (1992), n.º. 1, 85-110.

[8] Landau, S. "How to Tangle with a Nested Radical", *The Mathematical Intelligencer*, 1994.

[9] Sebastião e Silva, J. e Silva Paulo, J. D. *Compêndio de Álgebra (Terceiro Ciclo)*, Livraria Rodrigues, 1960.

[10] Tignol, J. *Galois' Theory of Algebraic Equations*, World Scientific, 2001.

[3] Não é necessário resolver a equação; pelo teorema da raiz racional as possíveis raízes racionais podem ser escritas na forma *r/t*, onde *t* divide -2 e, portanto, só pode ser $\pm1,\pm2$ e *r* divide 4 e logo só pode ser $\pm1,\pm2,\pm4$. Experimentando as várias possibilidades, chegamos à raiz indicada.

[4] No famoso tratado *Ars Magna*, *Cardan*, que seguia a prática vulgar na época de não considerar coeficientes negativos, tem necessidade de utilizar várias fórmulas distintas ao estudar a equação cúbica; assim, na equação $x^3+px=q$, onde p e q são números positivos, tem-se $x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}-\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$.

[5] Uma justificação alternativa é a seguinte: seja $f(x)=x^3+6x-20$. Tem-se que $x^3+6x=20 \Leftrightarrow f(x)=0$ e que $f(2)=0$. A função f é estritamente crescente já que $x<y \Rightarrow x^3<y^3$ e $x<y \Rightarrow 6x<6y$, pelo que a solução 2 é única e, portanto, $\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}=2$.

SOBRE O AUTOR

António Pereira Rosa é licenciado em Matemática (1986) e mestre em Matemática para o Ensino (2008) pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. É professor do quadro da Escola Secundária de Camões.