RICARDO MAMEDE
Universidade
de Coimbra
mamede@mat.uc.pt

O TEOREMA DOS REARRANJOS DE RIEMANN

Se alterarmos a ordem pela qual somamos um qualquer conjunto finito de números reais, a sua soma permanece a mesma. No entanto, a situação pode alterar-se de forma inesperada se o conjunto de números for infinito. Em alguns casos, a alteração da ordem pela qual somamos um conjunto infinito de números pode alterar a sua soma, ou até tornar a soma infinita. Neste canto vamos analisar as somas infinitas que têm esta característica usando o Teorema dos Rearranjos de Riemann.

1. INTRODUÇÃO

A manipulação de somas infinitas de números reais, designadas por séries numéricas ou simplesmente séries, é uma área que facilmente produz resultados inesperados e pouco intuitivos. Um exemplo que ilustra o perigo de estender de forma ingénua as regras algébricas das somas finitas a séries, é a soma

$$1-1+1-1+1-1\cdots+1-1+\cdots \qquad (1)$$

Colocando parênteses entre cada par $1-1$, podemos argumentar que

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots=0.$$

No entanto, se deslocarmos os parênteses uma unidade para a direita, obtemos

$$1+(-1+1)+(-1+1)+\cdots+(-1+1)+\cdots=1.$$

Este exemplo foi usado no século XVIII pelo matemático e padre Luigi Grandi como evidência da existência de Deus, uma vez que "mostrava" que é possível criar algo a partir do nada.

A série (1) é um exemplo de uma série divergente, à qual não faz sentido atribuir uma soma, uma vez que à medida que somamos mais termos a soma oscila entre 0 e 1. Já à série

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots \qquad (2)$$

é possível atribuir uma soma. Por exemplo, se considerarmos um quadrado de lado 1, podemos obter a sua área começando por considerar apenas metade da sua área; de seguida, consideramos metade da área que ainda não considerámos; repetimos o processo, considerando em cada passo metade da área que ainda não considerámos (veja-se a Figura 1). Intuitivamente, é fácil aceitar que

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$$

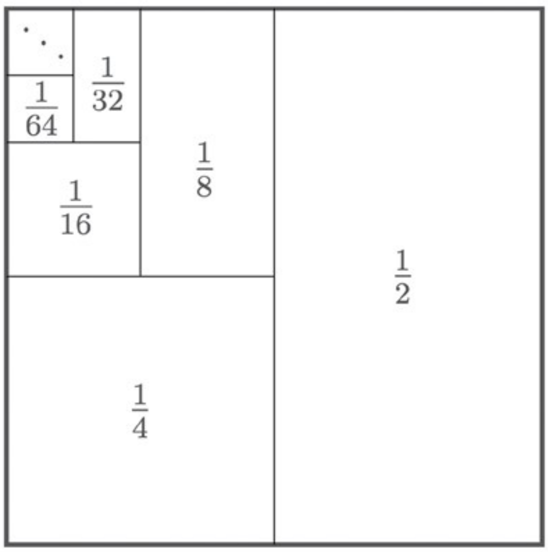

Figura 1. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=1$.

Uma série à qual é possível atribuir uma soma chama-se série convergente. Formalmente, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

converge se a sucessão das somas parciais $(s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots)$ for convergente, com $s_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ para $k \geq 1$. Neste caso, dizemos que o limite $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ é a soma da série e escrevemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

Portanto, s é a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se a soma dos seus n primeiros termos estiver tão próxima do número s quanto quisermos, desde que tomemos n suficientemente grande.

Também dizemos que a série diverge para $\pm\infty$ se o mesmo acontece com a sua sucessão das somas parciais.

É fácil verificar que a convergência da série $\sum a_n$ implica que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, uma vez que $a_n = s_n - s_{n-1}$. Já o recíproco não se verifica, isto é, existem sucessões (a_n)convergentes para 0 para as quais a série $\sum a_n$ é divergente.

Voltando à série (2), e usando a fórmula para a soma dos n primeiros termos de uma sucessão geométrica, temos que a soma dos seus n primeiros termos pode ser escrita como

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}.$$

Segue-se que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1$$

e, portanto, a série (2) é uma série convergente com soma 1.

Neste canto vamos analisar o que acontece à soma de uma série convergente se alterarmos a ordem pela qual somamos os seus termos.

2. CONVERGÊNCIA DE SÉRIES

Podemos distinguir dois tipos de séries convergentes. Se a série $\sum |a_n|$ for convergente, a série $\sum a_n$ diz-se absolutamente convergente. Por outro lado, uma série convergente que não seja absolutamente convergente chama-se simplesmente convergente.

É claro que uma série convergente de termos positivos é absolutamente convergente e, portanto, a série (2) é absolutamente convergente. Já a série harmónica alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

é um exemplo de uma série simplesmente convergente. De facto, é possível mostrar que esta série é convergente com soma $\ln(2)$ (veja-se, por exemplo, [1] para uma prova sem palavras desta identidade). No entanto, a série dos valores absolutos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

designada por série harmónica é divergente. Uma das provas mais antigas para este facto, atribuída ao matemático francês do século XIV Nicole Oresme [2], consiste em considerar a subsucessão $(s_2, s_4, s_8, \ldots, s_{2^n}, \ldots)$ da sucessão das somas parciais $(s_n)_{n\geq 1}$ da série harmónica e notar que agrupando convenientemente os termos, podemos escrever

$$\begin{aligned}
s_2 &= 1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2},\\
s_{2^2} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > \frac{2}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2}\\
s_{2^3} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)\\
&> \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = \frac{4}{2},
\end{aligned}$$

e, mais geralmente,

$$s_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n} > \frac{n+1}{2}.$$

Conclui-se assim que $\lim_{n\to\infty} s_{2^n} = \infty$ e, portanto, a sucessão das somas parciais da série harmónica é divergente. Segue-se que a série harmónica alternada é simplesmente convergente com soma $\ln(2)$:

$$\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \cdots$$

Uma série simplesmente convergente $\sum a_n$ pode ser vista como a soma de duas séries: a série $\sum a_n^+$ e a série $\sum a_n^-$, onde $a_n^\pm = (a_n \pm |a_n|)/2$, formadas respetivamente pelos termos positivos e pelos termos negativos de $\sum a_n$. É fácil verificar que as séries $\sum a_n^+$ e $\sum a_n^-$ são ambas divergentes. De facto, se uma delas, digamos $\sum a_n^+$, fosse convergente, então a série dos termos negativos

$$\sum a_n^- = \sum a_n - \sum a_n^+$$

seria igualmente convergente por ser a diferença de duas séries convergentes. Isto implicaria a convergência absoluta da série $\sum a_n$, uma vez que temos

$$\sum |a_n| = \sum \left(a_n - 2a_n^-\right).$$

Concluímos assim que se $\sum a_n$ for simplesmente convergente, a série $\sum a_n^+$ dos termos positivos diverge para ∞, enquanto a série $\sum a_n^-$ dos termos negativos diverge para $-\infty$. Notemos ainda que como a série $\sum a_n$ é convergente, temos que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, donde se segue que

$$\lim_{n\to\infty} a_n^+ = \lim_{n\to\infty} a_n^- = 0.$$

Voltando à série harmónica alternada, reordenemos os termos desta série da seguinte forma: a sequência de termos positivos e a sequência de termos negativos mantêm a ordem original, e a nova série consiste num termo positivo seguido de dois termos negativos. Obtemos assim a série

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots \tag{3}$$

Agrupando cada termo positivo com o termo negativo que lhe está imediatamente à direita, obtemos

$$\begin{aligned}
&\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{12}+\cdots\\
&=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots\\
&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\right)\\
&=\frac{1}{2}\ln(2).
\end{aligned}$$

Ou seja, a soma da série (3) difere da soma da série harmónica alternada que lhe deu origem. Este exemplo mostra que reordenar os termos de uma série simplesmente convergente pode alterar a sua soma. O primeiro matemático a detetar este fenómeno foi Dirichlet, em 1827, enquanto trabalhava sobre a convergência da série de Fourier. Alguns anos mais tarde, Dirichlet mostrou que este comportamento não ocorre em séries absolutamente convergentes [3], como veremos no capítulo seguinte.

3. O TEOREMA DOS REARRANJOS DE RIEMANN

Vamos agora investigar em que condições podemos alterar a ordem dos termos de uma série convergente sem alterar a sua natureza ou soma. Formalmente, alterar a ordem dos termos de uma série $\sum a_n$ significa tomar uma bijeção $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e considerar a série $\sum b_n$ onde $b_n = a_{\phi(n)}$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Começamos por mostrar que numa série convergente de termos não negativos, qualquer rearranjo dos seus termos dá origem a uma série que converge para a mesma soma.

Figura 2. Johann Dirichlet (1805-1859).

Teorema 3.1. *Suponhamos que $a_n \geq 0$ para todo o n. Então, se (b_n) é um rearranjo de (a_n) temos $\sum b_n = \sum a_n$.*

Demonstração. Denotemos por $s_n = \sum_{k=1}^n a_n$ e $t_n = \sum_{k=1}^n b_n$ as somas parciais de $\sum a_n$ e $\sum b_n$, e sejam $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ e $t = \lim_{n\to\infty} t_n$ (ou estes limites existem ou são iguais a ∞). O limite t envolve a soma de todos os termos da sucessão (b_n) e, portanto, envolve a soma dos termos $a_1, \ldots, a_n$. Como $a_n \geq 0$ para todo o n, segue-se que

$$s_n \leq t$$

para todo o n. De forma análoga, obtemos

$$t_n \leq s$$

para todo o n. Tomando limites quando n tende para ∞, concluímos que $s \leq t$ e $t \leq s$, ou seja, $s = t$. □

Provámos assim que a reordenação dos termos de uma série de termos não negativos não altera a natureza nem a soma da série, no caso de esta ser convergente. Vamos de seguida provar que o mesmo é válido para séries absolutamente convergentes (veja-se, por exemplo, [4]).

Teorema 3.2. *Se uma série é absolutamente convergente com soma s, todos os seus rearranjos convergem para a mesma soma s.*

Demonstração. Seja $\sum a_n$ uma série absolutamente convergente e $\sum b_n$ um seu rearranjo. A definição de série absolutamente convergente garante que $\sum |a_n|$ é convergente e o teorema anterior diz-nos que $\sum |b_n| = \sum |a_n|$. Usando a igualdade

$$b_n = |b_n| - (|b_n| - b_n)$$

e o facto de a soma de séries convergentes ser ainda uma

Figura 3. Bernhard Riemann (1826-1866)

série convergente, podemos escrever

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| - \sum_{n=1}^{\infty} (|b_n| - b_n)\,.$$

Uma vez que $|b_n| \geq 0$ e $|b_n| - b_n \geq 0$, os termos das duas séries do membro direito desta igualdade podem ser reordenados sem alterar a sua soma. Obtemos assim,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| - \sum_{n=1}^{\infty} (|b_n| - b_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| - \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| - a_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n.\end{aligned}$$

□

Portanto, a convergência absoluta de uma série garante que qualquer rearranjo dos seus termos não altera nem a natureza nem a sua soma. Neste aspeto, uma série absolutamente convergente comporta-se como uma soma finita, onde a ordem pela qual a soma dos seus termos é efetuada não altera a soma global. Em 1853, Riemann provou o seu Teorema dos Rearranjos que mostra que a situação é completamente diferente quando a série apenas converge simplesmente. Este resultado foi incluído num artigo sobre a série de Fourier com o título "Sobre a Representabilidade de uma Função por uma Série Trigonométrica", publicado após a morte de Riemann em 1866 [8].

Teorema 3.3. (Teorema dos Rearranjos de Riemann, 1853) *Seja $\sum a_n$ uma série simplesmente convergente. Dado um qualquer $c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, existe um rearranjo (b_n) dos termos de $\sum a_n$ tal que $\sum b_n = c$.*

Demonstração. Seja $\sum a_n$ uma série simplesmente convergente e sejam $p_1, p_2, \ldots$ os termos não negativos de $\sum a_n$ e $q_1, q_2, \ldots$ os termos negativos de $\sum a_n$, pela ordem pela qual aparecem nesta série. As séries $\sum p_n$ e $\sum a_n^+$ bem como $\sum q_n$ e $\sum a_n^-$ diferem apenas por termos nulos, pelo que $\sum p_n = \infty$ e $\sum q_n = -\infty$.

Vamos considerar em primeiro lugar o caso $c \in \mathbb{R}$ e construir um rearranjo dos termos de $\sum a_n$ que converge para c.

Como $\sum p_n = \infty$, existe um número natural k tal que

$$p_1 + \cdots + p_k > c.$$

Seja k_1 o menor destes números k e consideremos a soma parcial $s_1 = p_1 + \cdots + p_{k_1}$. Temos $s_1 > c$ e $p_1 + \cdots + p_{k_1 - 1} \leq c$. Portanto, $s_1 \leq c + p_{k_1}$, pelo que

$$0 \leq s_1 - c \leq p_{k_1}.$$

Se $c < 0$, ignoramos este primeiro passo. De seguida, à soma s_1 vamos adicionar o menor número de termos negativos de modo a obtermos uma nova soma t_1 menor do que c. Ou seja, consideramos o menor inteiro m_i tal que $t_1 = s_1 + q_1 + \cdots + q_{m_1} < c$ e $s_1 + q_1 + \cdots + q_{m_1 - 1} \geq c$. Neste caso, temos

$$0 \leq c - t_1 \leq -q_{m_1}.$$

Repetimos o processo indefinidamente, obtendo somas alternadamente inferiores e superiores a c, escolhendo em cada passo deste processo o menor número k_i de termos positivos e o menor número m_i de termos negativos tais que para cada i,

$$|s_i - c| \leq p_{k_i} \text{ e } |t_i - c| \leq -q_{m_i}. \tag{4}$$

Obtemos desta forma a série

$$p_1 + \cdots + p_{k_1} + q_1 + \cdots + q_{m_1} + p_{k_1+1} + \cdots + p_{k_2} + \\ + q_{m_1+1} + \cdots + q_{m_2} + \cdots$$

que é claramente uma reordenação dos termos de $\sum a_n$. Falta mostrar que esta série converge para o número c. Para tal, vamos provar que a sucessão das suas somas parciais converge para c. Como a série $\sum a_n$ é convergente, sabemos que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, donde se segue que também (p_n) e (q_n) tendem para zero quando $n \to \infty$. Portanto, as subsucessões (p_{k_i}) e (q_{m_i}) tendem para zero quando $n \to \infty$ e as equações (4) garantem que as somas parciais da série convergem para c.

Um argumento semelhante permite exibir uma reordenação dos termos de $\sum a_n$ que divirja para ∞ ou $-\infty$. Por exemplo, no caso $c = \infty$, consideramos uma sucessão (c_n) que divirja para ∞ e construímos um rearranjo dos termos de $\sum a_n$ tal que a soma s_1 dos primeiros k_1 termos positivos exceda c_1, a soma t_1 dos primeiros m_1 termos negativos com s_1 seja inferior a c_1, a soma s_2 exceda c_2 e t_2 seja inferior a c_2, e assim sucessivamente. Claramente, a sucessão das somas parciais da série assim construída é divergente. $\square$

Referimos anteriormente que a série harmónica alternada $\sum(-1)^{n+1}/n$ tem soma $\ln(2)$. Vamos usar a construção da demonstração do Teorema dos Rearranjos de Riemann para verificar esta identidade. Seja $c = \ln(2) \approx 0,6931$. Começamos por tomar o menor número de termos positivos da série cuja soma exceda $\ln(2)$, que no nosso caso consiste no primeiro termo:

$$s_1 = 1 > \ln(2).$$

De seguida, tomamos o menor número de termos negativos de forma a que a soma destes com s_1 seja inferior a $\ln(2)$:

$$t_1 = 1 - \frac{1}{2} = 0,5 < \ln(2).$$

Adicionamos de seguida termos positivos à soma t_1 de forma a voltarmos a exceder $\ln(2)$:

$$s_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \approx 0,8333 > \ln(2).$$

E adicionamos termos negativos de forma a voltarmos a ter uma soma inferior a $\ln(2)$:

$$t_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \approx 0,5833 < \ln(2).$$

Continuando este processo, obtemos as seguintes somas parciais

$$\begin{aligned}
s_3 &\approx 0,7833 > \ln(2)\\
t_3 &\approx 0,6166 < \ln(2)\\
s_4 &\approx 0,7595 > \ln(2)\\
t_4 &\approx 0,6345 < \ln(2)\\
s_5 &\approx 0,7456 > \ln(2)\\
t_5 &\approx 0,6456 < \ln(2)\\
s_6 &\approx 0,7365 > \ln(2)\\
t_6 &\approx 0,6532 < \ln(2)\\
s_{50} &\approx 0,6981 > \ln(2)\\
t_{50} &\approx 0,6881 < \ln(2)\\
s_{500} &\approx 0,6936 > \ln(2)\\
t_{500} &\approx 0,6926 < \ln(2)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Em cada passo, basta adicionar um termo negativo a $s_n > \ln(2)$ para obter a soma $t_n < \ln(2)$, com a sucessão (t_n) crescente e a aproximar-se sucessivamente de $\ln(2)$ por valores inferiores.

Analogamente, basta adicionar um termo positivo à soma $t_n < \ln(2)$ para obter a soma $s_{n+1} > \ln(2)$.

A sucessão (s_n) é decrescente e aproxima-se sucessivamente de $\ln(2)$ por valores superiores.

Obtemos assim a identidade,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2).$$

Terminamos com um último exemplo. Vamos voltar a reordenar os termos da série harmónica alternada de forma a obtermos os primeiros termos de uma série convergente para $\sqrt{2} \approx 1,414$.

Como anteriormente, começamos por escolher o menor número de termos positivos de $\sum a_n$ cuja soma seja superior a $\sqrt{2}$:

$$s_1 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \approx 1,533 > \sqrt{2},$$

seguido de termos negativos de forma a que a soma seja inferior a $\sqrt{2}$,

$$t_1 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \approx 1,033 < \sqrt{2}.$$

Repetindo o processo, obtemos:

$$\begin{aligned}
s_2 &= t_1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} \approx 1,455 > \sqrt{2}\\
t_2 &= t_1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{4} \approx 1,205 < \sqrt{2}\\
s_3 &= t_2 + \frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} \approx 1,4308 > \sqrt{2}\\
t_3 &= t_2 + \frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} - \frac{1}{6} \approx 1,264 < \sqrt{2}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{4} +\\
+ \frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} - \frac{1}{6} + \cdots
\end{aligned}$$

são os primeiros 14 termos de uma série, obtida reordenando os termos da série harmónica, cuja soma é $\sqrt{2}$.

4. PROBLEMAS

Terminamos este Canto Délfico com uma proposta de alguns problemas que podem ser resolvidos usando as ideias que desenvolvemos nas secções anteriores. O problema 1 foi retirado da *14th Putnam Mathematics Competition* (1954), os problemas 2 e 3 foram retirados de [7] e o problema 4 aparece em [5.] Uma prova do problema 5 pode ser encontrada em [6].

1. Reordenemos os termos de série harmónica alternada
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots \tag{5}$$
tomando dois termos positivos, depois um negativo, depois dois positivos, depois um negativo, e assim sucessivamente:
$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots \tag{6}$$
Denotemos por s_n e por t_n as n-ésimas somas parciais de (5) e (6), respetivamente. Sabemos que $\lim s_n = \ln(2)$. Assumindo que a série (6) é convergente e tem soma $\lim t_n = t$, mostre que

   (a) $t_{3n} = s_{4n} + \frac{1}{2}s_{2n}$,

   (b) $t \neq \ln(2)$.

2. Denotemos por S a soma dos termos da série harmónica que restam após eliminarmos todos os que contêm um dígito par:
$$S = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{19}+\frac{1}{21}+\cdots+\frac{1}{39}+\frac{1}{51}+\cdots$$
Prove que $S < 7$.

3. Eliminemos todos os termos da série harmónica cujo denominador seja divisível por um primo de dois ou mais dígitos. Averigúe se a série resultante é divergente ou convergente.

4. Mostre que a série que se obtém removendo todos os termos da série harmónica que contêm o dígito 9 é convergente.

5. Mostre que a soma dos recíprocos dos números triangulares é igual a 2:
$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)/2}+\cdots = 2.$$

REFERÊNCIAS

[1] M. Hudelson (2010). "Proof Without Words: The Alternating Harmonic Series Sums to ln 2", *Mathematics Magazine*, 83:4, 294.

[2] W. Dunham (1987). "The Bernoullis and the Harmonic Series", *The College Mathematics Journal*, 18:1, 18-23

[3] J. Dirichlet (1837). "Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen factor sind, unendlich viele Primzahlen enthält." *Abhandlungen der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften von 1837.*

[4] S.L. Gupta, and N. Rani (2004). *Fundamental Real Analysis*. Vikas Publishing House Pvt Ltd.

[5] A. Kempner (1914). "A Curious Convergent Series". *American Mathematical Monthly*. Washington, DC: Mathematical Association of America. 21 (2): 48–50.

[6] R. Nelsen (1991). "Proof without Words: Sum of Reciprocals of triangular numbers", *Mathematics Magazine*, 64:3, 167.

[7] S. Rabinowitz, and M. Bowron (1999). *Index to Mathematical Problems*, 1975-1979, MathPro Press.

[8] B. Riemann (1854), *Uber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe* (Sobre a representabilidade de uma função por uma série trigonométrica). Aus dem dreizehnten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.