NÃO COLOQUE TODOS OS OVOS NO MESMO CESTO

UMA NOTA ACERCA DE DUAS ESTRATÉGIAS DE TRANSPORTE

Miguel de Carvalho
Universidade de Edimburgo
Miguel.deCarvalho@ed.ac.uk

A sabedoria popular sugere que não coloque todos os ovos no mesmo cesto. Mas a Estatística revela que o problema de transporte esconde algumas subtilezas. Afinal quem tem razão?

SABEDORIA POPULAR

A sabedoria popular recomenda que não coloque todos os ovos no mesmo cesto. A ideia parece simples: se colocarmos todos os ovos no mesmo cesto e se o cesto cair, então perdemos todos ovos;[1] mas se repartirmos os ovos por cestos diferentes, e se cair um cesto, só perdemos os ovos desse cesto. Parece simples, mas não se iluda pois este provérbio esconde algumas surpresas.

UM PROBLEMA DE TRANSPORTE, DUAS ESTRATÉGIAS

Consideremos o problema de transporte referido anteriormente.[2] Este consiste em transportar n ovos em cestos entre dois locais e o nosso objetivo em seguida será comparar o retorno e o risco de duas estratégias de transporte; o retorno deve ser entendido neste contexto como o número de ovos que se consegue transportar em média. As estratégias que vamos comparar são as seguintes:

- Estratégia C(oncentrada): colocamos todos os ovos no mesmo cesto.
- Estratégia D(iversificada): repartimos os ovos por vários cestos; note que o número de ovos por cesto não é necessariamente igual.

Suponhamos que a probabilidade de um cesto cair (p) é a mesma para todos os cestos, independentemente da estratégia.

O RETORNO É O MESMO PARA AS ESTRATÉGIAS C E D

O primeiro ponto de destaque é que é possível demonstrar matematicamente o seguinte:

Resultado 1. *As estratégias C e D permitem transportar o mesmo número de ovos, em média.*

Isto talvez possa parecer surpreendente à primeira vista. O que tal quer dizer é que, se repetíssemos várias vezes a experiência de transportar ovos entre dois locais, então umas vezes ganhava a estratégia C outras vezes a D mas ambas as estratégias permitiriam transportar aproximadamente o mesmo número de ovos em média (ou seja, np).

O RISCO É MENOR PARA A ESTRATÉGIA D

A sabedoria popular recomenda que não se coloque todos os ovos no mesmo cesto e, afinal, a Estatística prova que, em média, podemos transportar o mesmo número de ovos em ambas as estratégias. Então, em que ficamos? O segundo ponto de destaque apresentado em seguida vai responder a esta questão e clarifica que a Estatística e a sabedoria popular estão completamente de acordo; de facto, é possível demonstrar matematicamente o seguinte:

Resultado 2. *A estratégia D é "menos arriscada" que a estratégia C (uma vez que apresenta uma menor variância).*

MORAL DA HISTÓRIA

Da próxima vez que transportar ovos (isto é, investir), não diga que não avisei. Não olhe só para os retornos! As estratégias C e D têm o mesmo retorno esperado, mas a estratégia C é mais arriscada!

DIVERSIFICAÇÃO DO RISCO

Como vimos anteriormente, este ditado ilustra cabalmente a diferença entre retorno e risco. E resume também na perfeição o princípio da diversificação do risco, o qual é célebre em Matemática Financeira (Petters and Dong, 2016, §3.2.3). No provérbio em discussão, os ovos são o objeto de interesse. Troquemos as palavras “cesto” por “aplicação financeira” e "ovos" por "dinheiro" e o provérbio converte-se em: "Não coloque todo o dinheiro na mesma aplicação financeira."

Mas as estratégias que visam diversificar o risco vão muito além de recomendar que não se invista apenas

[1] Para facilitar, vou supor ao longo desta nota que se um cesto cair, então partem-se todos os ovos desse cesto.

[2] Existem vários problemas matemáticos relacionados com ideias de transporte os quais são fundamentais em aplicações tais como, por exemplo, o *problema do caixeiro viajante* (Winston, 2004, §9,6) ou o *problema de transporte ótimo de Monge-Kantorovich* (Villani, 2009; Santambrogio, 2015).

numa só aplicação financeira.[3] Por exemplo, um princípio básico de diversificação do risco é que se deve evitar investir em dois ativos financeiros cujos preços são "correlacionados"; a intuição é de que quando investimos em dois ativos cujos preços tendem a mover-se na mesma direção, então é como se apenas tivéssemos investido num só ativo, ou seja, é quase como se estivéssemos a investir numa única aplicação financeira.

DETALHES TÉCNICOS E DEMONSTRAÇÕES

Objetivo e hipóteses

Recordemos que o objetivo é transportar n ovos entre dois pontos e suponhamos, para facilitar, que se um cesto cair, então partem-se todos os ovos desse cesto. Suponhamos também que a probabilidade de um cesto não cair ao chão (p) é a mesma para todos os cestos, em ambas as estratégias, e que a queda de um cesto não influencia a possibilidade de queda de outro cesto (independência).

Número de ovos que chegam ao destino final

O *número de ovos que chegam ao destino final usando a estratégia C* é

$$C = n\, I, \tag{1}$$

onde I é uma variável Bernoulli(p) que vale "1" se o cesto não cair e "0" caso contrário. Conforme se pode ver através da equação (1), se o cesto não cair, conseguimos transportar até ao destino final $C = n$ ovos; se cair, então $C = 0$ e portanto, nesse caso, não chega nenhum ovo ao destino final. Para a estratégia D, o transporte é feito usando m cestos, com $1 < m \leq n$. O *número de ovos que chegam ao destino final usando a estratégia D* é

$$D = \sum_{i=1}^{m} n_i I_i, \tag{2}$$

onde n_i é o número de ovos no i-ésimo cesto e I_i uma variável semelhante à anterior, ou seja, que vale "1" quando o i-ésimo cesto não cai, e "0" caso contrário, para $i = 1, \ldots, m$. O número total de ovos a transportar é o mesmo independentemente da estratégia, ou seja, $n = \sum_{i=1}^{m} n_i$.

Demonstrações

Tendo em conta as hipóteses referidas, demonstram-se os resultados 1 e 2.

Demonstração do resultado 1. Usando (1), o facto de que $I \sim \text{Bernoulli}(p)$ e propriedades elementares do valor esperado, obtemos

$$\mathrm{E}(C) = \mathrm{E}(nI) = n\mathrm{E}(I) = n\,p.$$

De modo semelhante,

$$\mathrm{E}(D) = \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{m} n_i I_i\right) = \sum_{i=1}^{m} n_i \underbrace{\mathrm{E}(I_i)}_{p} = p \sum_{i=1}^{m} n_i = n\,p.$$

□

Demonstração do resultado 2. Usando (1), o facto de que $I \sim \text{Bernoulli}(p)$ e propriedades elementares da variância, obtemos

$$\mathrm{var}(C) = \mathrm{var}(nI) = n^2\, \mathrm{var}(I) = n^2 p(1-p). \tag{3}$$

De modo semelhante,

$$\mathrm{var}(D) = \mathrm{var}\left(\sum_{i=1}^{m} n_i I_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{var}(n_i I_i) = \sum_{i=1}^{m} n_i^2\, \mathrm{var}(I_i) = \sum_{i=1}^{m} n_i^2 p(1-p). \tag{4}$$

Da comparação das equações (3) e (4) resulta que

$$\mathrm{var}(C) = \left(\sum_{i=1}^{m} n_i\right)^2 p(1-p) \geq \sum_{i=1}^{m} n_i^2 p(1-p) = \mathrm{var}(D),$$

sendo a desigualdade uma consequência do facto de que $(\sum_{i=1}^{m} x_i)^2 \geq \sum_{i=1}^{m} x_i^2$, se $x_i \geq 0$.[4]

REFERÊNCIAS

[1] Linton, O. (2019), *Financial Econometrics*, Cambridge: Cambridge University Press.

[2] Markowitz, H. M. (1952), “Portfolio Selection”, *The Journal of Finance*, 7, 77–91.

[3] Petters, A. O. and Dong, X. (2016), *An Introduction to Mathematical Finance with Applications*, Nova Iorque: Springer.

[4] Rubinstein, M. (2002), "“Markowitz’s" portfolio selection": A fifty-year retrospective”, " *The Journal of Finance*, 57, 1041–1045.

[5] Santambrogio, F. (2015), *Optimal Transport for Applied Mathematicians*, Nova Iorque: Birkäuser.

[6] Villani, C. (2009), *Optimal Transport: Old and New*, Nova Iorque: Springer.

[7] Winston, W. L. (2004), *Operations Research: Applications and Algorithms*, Belmont, CA: Thomson.

[3] Um dos modelos matemáticos mais afamados neste contexto é o modelo média-variância, o qual foi desenvolvido pelo economista financeiro Harry Markowitz (Markowitz, 1952), um dos laureados com o prémio Nobel da Economia em 1990. Este modelo esteve na origem da fundação da teoria moderna da gestão de carteiras de investimento e, apesar de ter sido desenvolvido em meados do século XX, é ainda uma referência-chave na indústria financeira. Para mais detalhes acerca deste modelo consultar, por exemplo, Rubinstein (2002) e Linton (2019, §1.6).

[4] Para demonstrar esta desigualdade basta notar que $(\sum_{i=1}^{m} x_i)^2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} x_i x_j = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 + \sum_{i \neq j} x_i x_j \geq \sum_{i=1}^{m} x_i^2$, sendo o último passo válido, dado que $x_i \geq 0$ por hipótese.

SOBRE O AUTOR

Miguel de Carvalho é *reader* em Estatística no Departamento de Matemática da Universidade de Edimburgo. Exerce neste momento a função de presidente da Sociedade Portuguesa de Estatística *(https://spestatistica.pt)*. As suas trajetória e investigação foram condecoradas com vários prémios de prestígio internacional na área da Estatística Matemática (por ex: Lindley Prize - International Society for Bayesian Analysis) e é ainda editor associado de revistas científicas líderes nessa área, tais como *The American Statistician* e *Annals of Applied Statistics*.

INTERNATIONAL DAY OF MATHEMATICS
MARCH 14