José Carlos Santos
Universidade
do Porto
jcsantos@fc.up.pt

SOBRE A REALIDADE DOS NÚMEROS COMPLEXOS

É geralmente afirmado que os números complexos são essenciais para formular a Mecânica Quântica, mas será mesmo assim? Foi feita uma experiência para responder a esta pergunta e o resultado parece ter sido conclusivo.

1. NÚMEROS COMPLEXOS: MATEMÁTICA

Os números complexos surgiram pela primeira vez em 1545, no livro *Ars Magna* (veja-se [2]), de Girolamo Cardano[1]. Mais precisamente, surgem quase no fim do livro, quando o autor resolve o seguinte problema: encontrar dois números cuja soma seja 10 e cujo produto seja 40. E a resposta dada é esta: os números em questão são $5+\sqrt{-15}$ e $5-\sqrt{-15}$. Logo em seguida, Cardano faz referência à "tortura mental" que consiste em fazer operações aritméticas com quantidades desta natureza, que descreve como sendo "tão subtis quanto inúteis".

O *Ars Magna* também é famoso por conter a chamada *fórmula de Cardano*, que permite resolver equações de terceiro grau. Mas esta fórmula tem um problema: tem uma raiz quadrada de um número que, no caso de certas equações, é negativo, mesmo quando a equação tem uma solução (real). É razoável especular que foi isto que levou Cardano a pensar em raízes quadradas de números negativos, mas ele não menciona esta possibilidade no livro.

Essa ligação foi feita por Rafael Bombelli no seu *L'Algebra* que surgiu em 1572 (veja-se [1]). Aí, Bombelli explicou como levar a cabo operações aritméticas com números complexos e como é possível aplicar a fórmula de Cardano mesmo quando envolve tais números.

Esta foi a primeira aplicação encontrada para os números complexos: eram umas entidades estranhas que era preciso saber manipular para se poder empregar a fórmula de Cardano e, consequentemente, resolver equações de terceiro grau. Durante algum tempo, ninguém viu mais nenhuma utilidade para eles até que, em 1629, Albert Girard publicou *Invention Nouvelle en l'Algèbre*, onde explicou que uma equação polinomial de grau n tem, no máximo, n soluções (reais ou não). Consequentemente, se conseguirmos descobrir n soluções de uma equação polinomial de grau n, podemos ter a certeza de que não haverá mais (veja-se [4, §14.1]).

No século XVIII, Euler (que foi quem introduziu a notação i para a unidade imaginária) já usava os números complexos sem hesitar, tanto na Análise, onde, por exemplo, explicou que se tem, para qualquer número real α,

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\,\mathrm{sen}(\alpha),$$

(a chamada *fórmula de Euler*) como na Álgebra, onde recorreu aos números complexos a fim de provar que qualquer polinómio com coeficientes reais pode ser escrito como produto de polinómios de grau 1 ou 2 com coeficientes reais.

Até aqui, os números complexos eram entidades puramente algébricas e não tinham qualquer interpre-

[1] Kleber Kilhian, "Os Números Complexos de Cardano a Hamilton", *https://www.obaricentrodamente.com/2022/01/os-numeros-complexos-de--cardano-a-hamilton.html*

tação geométrica. Aliás, Descartes afirmou mesmo que é impossível visualizar aqueles números. No entanto, por volta de 1800, dois matemáticos amadores, o norueguês Caspar Wessel e o suíço Jean-Robert Argand, explicaram como visualizar os números complexos como pontos do plano. Esta ideia foi reforçada pela mesma altura por Gauss (que é o autor da expressão "número complexo"), o que ajudou à aceitação daqueles números. E, naturalmente, a possibilidade de visualizar ajudou à divulgação deste conceito.

2. NÚMEROS COMPLEXOS: FÍSICA E ENGENHARIA

À partida, poderá ser difícil ver como é que os números complexos possam ter utilidade na Física, mas tais aplicações já existem desde a primeira metade do século XIX. Em 1823, o físico francês Augustin Fresnel publicou um artigo sobre Ótica no qual estudava o comportamento de um raio de luz polarisada quando atinge a superfície que separa dois meios transparentes. Aí, ele viu-se numa situação semelhante à de Cardano: obteve uma expressão analítica na qual surgia a raiz quadrada de um número que, por vezes, é negativo. Mais precisamente, quando o número sob o sinal de raiz quadrada é maior do que 0, parte do sinal luminoso é refletido e parte passa para o novo meio. Quando aquele número é 0, o sinal é totalmente refletido. Mas como interpretar a fórmula quando o valor é negativo? Fresnel poderia pura e simplesmente ter pensado que, nesse caso, a fórmula não se aplicava. Em vez disso, resolveu aplicar um princípio metafísico, que se deve a Leibniz, a chamada lei da continuidade, e escreveu (veja-se [3]):

> "[...] segundo a lei geral da continuidade, se existe uma expressão exata para as leis da reflexão até ao limite considerado, ela deveria permanecer válida após este; mas a dificuldade reside em interpretar o que a análise afirma relativamente a estas quantidades imaginárias. É, no entanto, isto que iremos fazer, talvez não por raciocínios rigorosos, mas ao menos pelas induções mais naturais e mais prováveis."

Naturalmente, o limite atrás referido é a altura a partir da qual o número sob o sinal de raiz quadrada é igual a 0. E como é que Fresnel lida com o caso em que o número é negativo? Obtém-se então um número complexo com valor absoluto 1 e, portanto, um número da forma $e^{i\alpha}$ (ou, o que é a mesma coisa em virtude da fórmula de Euler, um número da forma $\cos(\alpha) + i\,\mathrm{sen}(\alpha)$), para algum número real α. E este número α é, segundo Fresnel, a diferença de fase entre o sinal luminoso (que, note-se, é uma onda) antes de tocar na superfície e depois de ser refletido. E Fresnel conseguiu confirmar experimentalmente esta hipótese.

Figura 1. Augustin Fresnel.

Algumas décadas mais tarde (veja-se [5, cap. 5]) surgiu a primeira aplicação dos números complexos à Engenharia. Isto começou em 1869, quando o físico britânico John William Strutt (mais conhecido como Lorde Rayleigh) empregou números complexos para explicar o funcionamento de circuitos elétricos. Esta abordagem à Engenharia Eletrotécnica foi muito desenvolvida e ampliada pelo engenheiro alemão (naturalizado norte-americano) Charles Steinmetz, que ficaria conhecido como "o feiticeiro que gerou eletricidade a partir da raiz quadrada de menos um". Aliás, o primeiro texto que Steinmetz publicou (em 1894) sobre este assunto tinha um título que anunciava logo ao que vinha: "Quantidades complexas e o seu uso na Engenharia Eletrotécnica."

3. MECÂNICA QUÂNTICA

É provavelmente na Mecânica Quântica que se podem ver as mais conhecidas aplicações dos números complexos à Física. A equação de Schrödinger é uma equação diferencial que descreve o comportamento de uma função de onda Ψ, a qual toma valores complexos. Uma questão natural é a de saber como é que podem ser interpretados, em termos físicos, aqueles valores complexos. Acontece que o que tem uma interpretação física são os valores absolutos daqueles números; estão sempre entre 0 e 1 e dão a probabilidade de uma partícula estar numa determinada posição. Mas o próprio Erwin Schrödinger escreveu (veja-se [6]; este artigo também está disponível *online*[2]) numa carta dirigida a Hendrik Lorentz em 1926 (o mesmo ano em que publicou a sua equação):

> "O que é desagradável aqui, e de facto mesmo digno de contestação, é o uso de números complexos. Ψ tem que ser fundamentalmente uma função real."

Surgiram no início deste século propostas de maneiras de formular a Mecânica Quântica que só envolvem números reais[3]. Muitos dos fenómenos típicos da Mecânica Quântica podem ser explicados a partir de tais formulações. Mas, embora tais ideias parecessem promissoras, ficou provado que nenhuma destas abordagens funciona. O processo não foi simples, pois já tinha sido provado que as formulações reais permitiam descrever as situações mais simples da Mecânica Quântica. Os autores de [6] tiveram de conceber uma experiência suficientemente complexa para testar a ideia de que certos fenómenos da Mecânica Quântica não são passíveis de ser descritos por qualquer das versões reais da teoria, mas também suficientemente simples para poder ser levada à prática. E conseguiram! Publicaram a sua experiência imaginária e já houve diversos grupos de investigadores que a levaram à prática. E a conclusão foi de que, de facto, as formulações reais da Mecânica Quântica são incompatíveis com os resultados das experiências.

Assim sendo, parece que os números complexos estão aí para ficar, quer se goste deles quer não.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. Bombelli, *L'Algebra,* Feltrinelli, 1966.

[2] G. Cardano, *The Rules of Algebra (Ars Magna)*, Dover Publications, 1993.

[3] A. Fresnel, *Mémoire sur la Loi des Modifications que la Réflexion Imprime a la Lumière Polarisée, in* Œuvres Complètes d'Augustin Fresnel (tome premier), pp. 763-799, Johnson Reprint Corporation, 1965.

[4] V. J. Katz, *A History of Mathematics: An Introduction*, Addison-Wesley, 2009.

[5] P. J. Nahim, *An Imaginary Tale: The story of* $\sqrt{-1}$, Princeton University Press, 1998.

[6] M.-O. Renou, D. Trillo, M. Weilenmann et al., "Quantum Theory based on Real Numbers can be Experimentally Falsified", *Nature* **600**, pp. 625-629, 2021.

[2] *https://www.nature.com/articles/s41586-021-04160-4*

[3] Veja-se (além de [6]) A. Avella, *Quantum Mechanics Must Be Complex, https://physics.aps.org/articles/pdf/10.1103/Physics.15.7* e M.-O. Renou *et al., Quantum Physics Falls Apart Without Imaginary Numbers, https://www.scientificamerican.com/article/quantum-physics-falls-apart-without-imaginary--numbers/*