



PEDRO J. FREITAS
Universidade de
Lisboa
pjfreitas@fc.ul.pt

LADRILHOS INESPERADOS

Este ano foi cheio de surpresas no campo das pavimentações não periódicas do plano

É com muito gosto que dou início, neste número da *Gazeta de Matemática*, a uma coluna dedicada às relações entre arte e matemática – que é também o tema de uma disciplina que leciono, há cinco anos, na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Apesar de já ter planeado um tema para este primeiro texto, inesperadamente (como o título diz), apareceu uma novidade extraordinária no mundo das pavimentações: descobriu-se um ladrilho, único, que pavimenta o plano de forma *necessariamente* não periódica, isto é, evitando simetrias de translação.

A história, contada com detalhe em [K123], começa com David Smith, um técnico de impressão reformado, de Yorkshire, e entusiasta de puzzles e fractais. Smith havia desenhado, em computador, uma forma especial de ladrilho poligonal, e foi tentando ver que área conseguiria cobrir usando esse ladrilho. Não só este ladrilho parecia poder pavimentar áreas cada vez maiores, como parecia igualmente não formar nenhum padrão. Depois de ter recortado alguns destes ladrilhos em cartão, ficou convencido de que estava perante algo especial e contactou um seu amigo, Craig Kaplan, da Universidade de Waterloo, no Canadá, para juntos investigarem as propriedades desta forma. Juntaram-se a eles Joseph Myers, um entusiasta de matemática recreativa, de Cambridge, no Reino Unido, e Chaim Goodman-Strauss, matemático americano ligado ao Museu da Matemática, em Nova Iorque, no sentido de demonstrar aquilo que Smith havia intuído: que esta

forma pavimentava o plano, de forma não periódica, sendo apenas necessário, por vezes, tomar a sua imagem refletida. Os resultados encontrados, que confirmam estas suspeitas iniciais, foram publicados no artigo [SMKG23], que descreve o problema e a sua solução de maneira muito clara e acessível, e que, portanto, recomendo vivamente.

A figura 1 mostra uma destas pavimentações, os ladrilhos que são imagem em espelho dos outros estão a azul-escuro.

A figura 1 mostra também a estrutura simples do ladrilho: é formado por papagaios, isto é, quadriláteros com simetria de reflexão em relação a uma diagonal. Vê-se também que a pavimentação que usa estes ladrilhos pode obter-se a partir da pavimentação do plano por hexágo-

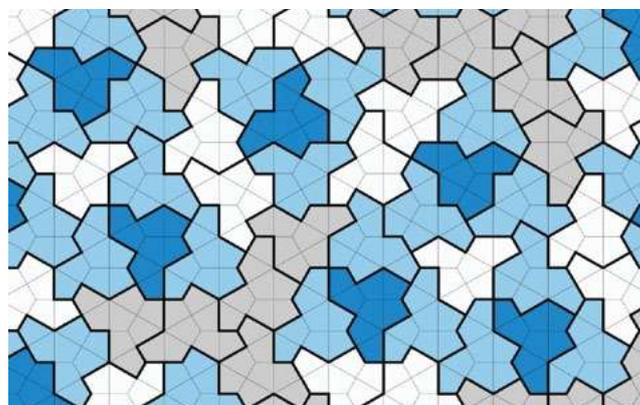


Figura 1. Pavimentação com ladrilho não periódico, do site [Ka23a].

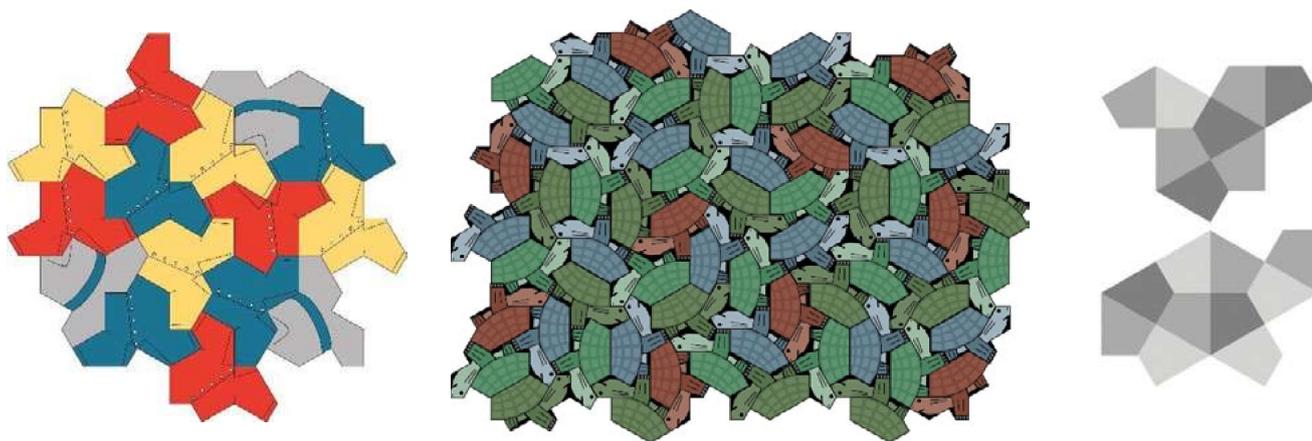


Figura 2. “Camisas e chapéus”, por Robert Fathauer, “tartarugas”, por David Richeson, e um esquema dos dois ladrilhos usados, do site [L23].

nos regulares, uma simplicidade inesperada para uma solução de um problema em aberto, pelo menos, desde os anos 60. E este é apenas um de uma família de ladrilhos que tem esta propriedade, como veremos a seguir.

Esta notícia espalhou-se a grande velocidade pela internet, a partir do passado dia 21 de março. Craig Kaplan construiu o site [Ka23a], o qual recolhe a informação mais central acerca desta descoberta, Christian Lawson-Perfect construiu outro site, [L23] com o ladrilho numa grande variedade de formatos, tanto gráficos como prontos para impressão 3D ou corte a laser. E surgiram também designações coloridas para o ladrilho: o “chapéu” e a “camisa”, para o ladrilho descrito acima, ou a “tartaruga” para outro dos ladrilhos que tem a mesma propriedade (ver figura 2). Foi também chamado um “einstein”, palavra composta com “ein” e “stein” (que certamente levará a confusões sobre a autoria da descoberta do ladrilho) e que reflete a sua capacidade de, sozinho, pavimentar o plano sem repetições.

Os desenvolvimentos deram-se igualmente a grande velocidade: já depois de ter escrito e enviado este texto, foi anunciada a 30 de maio uma nova forma, o “espectro”, que consegue pavimentar o plano de forma necessariamente não periódica, mas desta vez sem necessitar de reflexões do ladrilho! A figura 3 apresenta uma dessas pavimentações, para mais informação, consulte-se [Ka23b].

Esta história tem alguns paralelos com a da descoberta de várias pavimentações, estas periódicas, usando ladrilhos pentagonais, nos anos 70 – nomeadamente, terem aparecido de forma inesperada pela mão de matemáticos amadores. A protagonista desta história é Marjorie Rice, uma dona de casa de San Diego, entusiasta da coluna de Martin Gardner no *Scientific American*. Em 1975, um dos

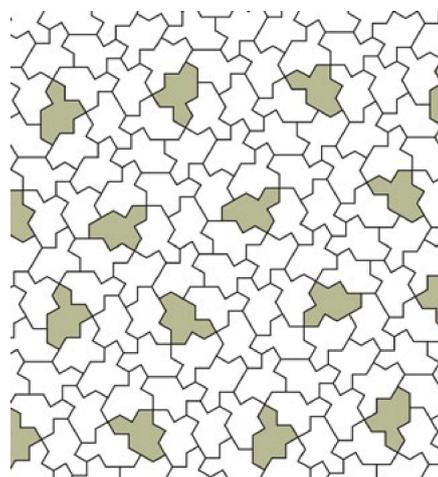


Figura 3. Pavimentação com ladrilho não periódico, do site [Ka23b]

textos desta coluna versava sobre pavimentações com ladrilhos pentagonais congruentes: Gardner anunciava que, em 1967, todas as pavimentações possíveis tinham sido encontradas, com a descoberta de três pavimentações que tinham escapado até então. No entanto, um mês depois, um dos leitores do *Scientific American* enviou a Gardner uma nova pavimentação, mostrando que a classificação, afinal, não estava completa.

Rice sentiu-se então motivada a fazer pesquisas por si própria. Nos seus tempos livres, no Natal de 1975, fez inúmeros desenhos de pavimentações com pentágonos, tendo mesmo inventado notação para as restrições entre os ângulos e lados dos pentágonos. Em fevereiro de 1976, Rice enviou uma nova pavimentação a Martin Gardner, que a reenviou a Doris Schattschneider, uma especialista em pavimentações. Esta, depois de alguma hesitação ini-

cial, validou a descoberta, e a partir daí começou a corresponder-se com Rice. Rice prolongou os seus trabalhos ao longo de vários anos, tendo vindo a descobrir dezenas de novas pavimentações com pentágonos. Estas pavimentações são hoje agrupadas em 15 classes, das quais quatro foram apresentadas por Rice. As suas descobertas foram publicadas num artigo de Schattschneider, “In Praise of Amateurs”, [S81], no qual aparecem várias das suas pavimentações. Na figura 4 vemos dois exemplos.

Também estas pavimentações foram adaptadas para criação de padrões com animais ou plantas, ao estilo de Escher. Rice havia concluído metade de um curso por correspondência em arte comercial antes de se casar, e, à medida que ia descobrindo pavimentações, explorava

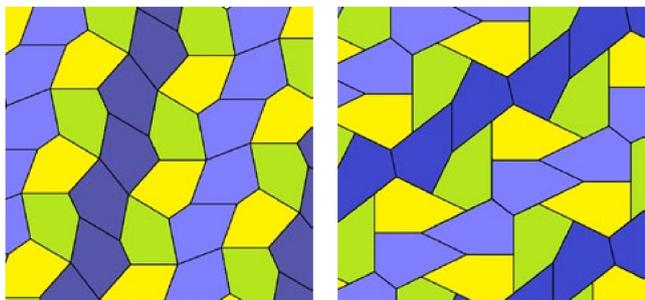


Figura 4. Duas pavimentações com pentágonos descobertas por Marjorie Rice. Imagens de Tomrueen (own work, CC BY-SA 4.0).

igualmente formas de as utilizar como grelhas para sobrepor flores, conchas, borboletas ou abelhas. No entanto, não é necessária esta referência à figuração para que estas pavimentações tenham interesse artístico: em 1999, uma destas pavimentações descobertas por Rice foi instalada no chão do foyer da sede da Mathematical Association of America, em Washington.

Também aqui, em Portugal, podemos admirar uma pavimentação por pentágonos, esta já conhecida há muito – foi um dos cinco tipos de pavimentações descritas por Karl Reinhardt em 1918. Tal como os ladrilhos aperiódicos, também esta pode ser obtida a partir da pavimentação do plano em hexágonos. Podem ver-se algumas fotos na figura 5 e, para a ver ao vivo, basta ir até à estação de metro de Arroios.

Agradecimentos

Agradeço a Robert Fathauer e a David Richeson pela amável cedência das imagens da figura 2. O autor recebeu financiamento da FCT, I.P./MCTES através de fundos nacionais (PIDDAC): UIDB/00286/2020 e UIDP/00286/2020.



Figura 5. Pavimentação por pentágonos na estação de metro de Arroios (fotos do autor).

REFERÊNCIAS

- [L23] *christianp/aperiodic-monotile*, no GitHub. <https://github.com/christianp/aperiodic-monotile>.
- [Ka23a] “An Aperiodic Monotile”, <http://cs.uwaterloo.ca/~csk/hat>.
- [Ka23b] “A chiral aperiodic monotile” <https://cs.uwaterloo.ca/~csk/spectre/>
- [K123] Erica Klarreich, “Hobbyist Finds Math’s Elusive ‘Einstein’ Tile”, *Quanta Magazine*, 4 de abril de 2023. <https://www.quantamagazine.org/hobbyist-finds-maths-elusive-einstein-tile-20230404>.
- [S81] Doris Schattschneider, “In Praise of Amateurs”. In: Klarner, D.A. (eds) *The Mathematical Gardner* (1981). Springer, Boston, MA. http://doi.org/10.1007/978-1-4684-6686-7_16.
- [SMKG23] Smith, Myers, Kaplan, Goodman-Strauss, “An Aperiodic Monotile, Preprint”, <https://arxiv.org/abs/2303.10798>.
- [W] “Pentagonal Tiling”, Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Pentagonal_tiling.

SOBRE O AUTOR

Pedro J. Freitas é professor no departamento de História e Filosofia das Ciências da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Coordenação do espaço ARTE E MATEMÁTICA:

Pedro J. Freitas, Universidade de Lisboa, pjfreitas@fc.ul.pt