HÉLDER PINTO
Instituto Piaget,
RECI e CIDMA-UA
helder.pinto@ipiaget.pt

O CÍRCULO DA MORTE

Numa situação de vida ou de morte, é sempre bom saber alguma matemática… Neste artigo trazemos problemas matemáticos onde se procura escapar à morte (quase) certa!

Na primeira situação, consideremos o bem conhecido problema atribuído a Flávio Josefo (que teve diversas variações ao longo dos tempos):

> *Flávio Josefo estava sentado em círculo com 40 dos seus soldados. Cientes da morte iminente às mãos dos romanos, e nenhum querendo cometer suicídio por motivos religiosos, decidiram fazer um pacto entre eles: cada um iria assassinar, sucessivamente, o soldado à sua esquerda (o primeiro "assassino" é o soldado da posição 1).*
>
> *Os assassinatos teriam de acontecer no sentido dos ponteiros do relógio até que apenas sobrasse um soldado vivo. Essa pessoa teria de esperar pelos romanos… Flávio, conta a lenda, foi o soldado que sobreviveu a este pacto. Em que lugar estava ele sentado?*

Na figura 1 pode encontrar a sucessão de assassinatos que ocorreriam nesta situação e observar que o soldado sobrevivente estava colocado na posição 19.

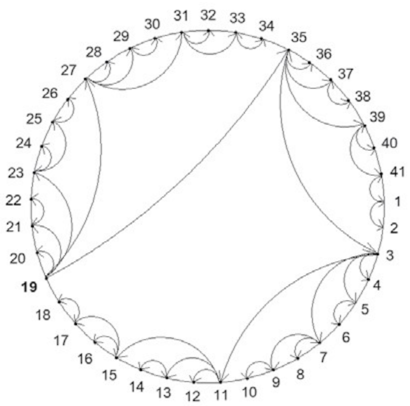


Figura 1: Solução do problema indicado anteriormente.

Em [1] pode encontrar uma simulação animada para a solução deste problema bem como a sua ligação com o sistema binário. Utilizando este sistema, é muito fácil encontrar a solução do problema.

E se, em vez de matar o soldado imediatamente à sua esquerda, cada soldado matasse o segundo soldado (vivo, claro) à sua esquerda? Em que posição estava sentado o último sobrevivente?

Em [2] pode encontrar uma vasta lista de referências a este problema e indica-se que este seria o problema original de Josefo, ou seja, ter-se-iam 41 soldados em círculo e assassinatos de "3 em 3", ou seja, morre sempre o terceiro soldado vivo (morto pelo primeiro); no problema anterior era o segundo soldado que morria (assassinado igualmente pelo primeiro).

De facto, o problema pode ser generalizado para quaisquer n soldados, com assassinatos de "m em m" soldados em que n e m são números naturais. Resolva este problema para diversos valores de m e n e tente descobrir um processo para obter a resposta geral.

Em [3] pode simular as soluções dos problemas, para diferentes valores, no GeoGebra.

Um outro problema matemático/lógico envolvendo potencial morte é o bem conhecido paradoxo do condenado:

> *A um sábio, condenado à morte, foi proposto que dissesse a sua última frase com as seguintes condições:*
>
> *- Se você disser uma verdade, será morto por enforcamento; se você disser uma mentira, morrerá afogado.*
>
> *Qual deverá ser a frase do condenado para se salvar?*

Um outro condenado à morte encontra-se em vias de ver executada a sua sentença. Observe o problema a seguir e ajude o prisioneiro a salvar-se (este é mais um problema de astúcia do que de raciocínio matemático).

Um prisioneiro é condenado à morte. Para tal, o prisioneiro deve escolher uma das seguintes salas:

- *A sala 1 está cheia de fogueiras acesas;*
- *A sala 2 está cheia de assassinos armados;*
- *A sala 3 está cheia de leões que não comem há três meses.*

Qual a sala que o prisioneiro deve escolher para se salvar? Porquê?

Últimas notas:

1. A seguir deixamos uma nota para uma notícia recente [4] que surpreendeu muitos apostadores incautos (e não só):

1, 2, 3, 4, 6 + 7. Foi esta a chave do sorteio do Totoloto de quarta-feira que deixou o País a "coçar a cabeça". Isto porque, na combinação vencedora, faltou apenas o número 5 para ser um resultado sequencial. Além disso, quatro pessoas acertaram no jackpot, tendo amealhado 3.087.482,97 euros. Mas é improvável? Segundo professores de matemática, não.

Manuel Scotto, professor catedrático do Departamento de Matemática do Instituto Superior Técnico da Universidade de Lisboa, adiantou, em declarações ao Notícias ao Minuto, que a probabilidade de ter sido esta a combinação vencedora é a mesma que qualquer outra, já que "todas as chaves são improváveis".

"A probabilidade é a mesma de todas as outras chaves. Todas as chaves são improváveis, mas as pessoas tendem a não gostar de chaves que pareçam demasiado fáceis", esclareceu.

Para leitores matemáticos, é claro que qualquer chave é igualmente improvável e não há dúvida absolutamente nenhuma. Mas a surpresa geral é aceitável e não é, a meu ver, uma questão de não se gostar de chaves fáceis. De facto, no totoloto existem apenas 45 possibilidades com os cinco números sorteados consecutivos (não considerando o número suplementar), o que, em 1.906.884 possibilidades (mais uma vez não considerando o suplementar), é manifestamente pouco (em termos relativos). E aqui é que está a surpresa justificada: sair uma chave com a tipologia de números consecutivos é mesmo muito mais improvável do que aparecer uma chave de tipologia "salteada"… Contudo, um apostador não ganha se sair uma qualquer chave "salteada"; ganha se sair a sua chave "salteada" e é neste ponto que por vezes há confusões… Apesar de uma chave específica consecutiva e uma chave "salteada" específica serem exatamente iguais em termos de probabilidade, é bem mais provável que seja sorteada uma chave de tipologia "salteada"...

2. Numa outra notícia, em [5], tem-se um comentário para uma estatística do futebol português da época passada:

"O penálti é uma coisa tão importante que quem deveria bater era o presidente do clube." A frase famosa é atribuída a Neném Prancha (1906-1976), olheiro, roupeiro, massagista e técnico de divisões de base do futebol brasileiro. Porém, ele sempre disse que a frase que proferiu era bem diferente: "O penálti é tão fácil de marcar que até o presidente o pode bater."

A verdade é que, tendo taxa de sucesso relativamente alta, marcar um penálti não é sinónimo de golo. Mesmo sem ser o presidente a executar o castigo máximo. São os números que o confirmam. Nas últimas dez épocas, por exemplo, só 78% das grandes penalidades marcadas em Portugal terminaram em golo. Ou seja, grosso modo, três em cada quatro penáltis dão golo. Neste período foram assinaladas 1065 grandes penalidades na Liga portuguesa. Nada menos de 828 foram convertidas em golo e 237 foram falhadas. Dá, pois, uma taxa de acerto de 78%.

Se a taxa de acerto é 78% (aproximação de 77,746…), não seria mais correto afirmar que, grosso modo, quatro em cada cinco penáltis dão golo? De facto, 77,75% está "suficientemente" a meio para se aceitar a escolha de uma versão ou de outra… Mas, para reforçar a ideia de que um penálti não é sinónimo de golo, é claramente mais enfática a versão "marca três em quatro", que é equivalente a dizer que se falha um em cada quatro… Falhar um cada cinco já não parece tão mal…

3. Num apontamento mais alegre e romântico, façamos ainda referência a duas canções que saíram este ano e que falam de matemática (uma delas "comparando" o nosso sistema decimal ao sistema binário da computação, de modo a ilustrar eventuais incompatibilidades no amor… O melhor é mesmo não complicar, nem no amor nem na matemática!):

Amor Digital (Jorge Palma)

Sei lá se me vou dar bem com esse teu amor digital
Ele é tão por demais veloz que o meu velho sistema decimal
Mas sei que ao olhar para ti qualquer numeração vai ao ar
Se o meu dois no teu caso é dez

Se calhar é melhor não complicar
(…)

Na Escola (Os Quatro e Meia)
Foi na escola que aprendi
Sobre plantas e animais
Dividi, multipliquei
Com três casas decimais

(…)

Aprendi a picotar
Fiz centenas de postais
Sei os sólidos e as formas
Bissetrizes, diagonais

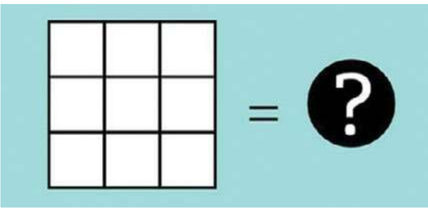
(…)

De mochila presa às costas
Com dez quilos, talvez mais
Tantas vezes fui à escola
Aprender coisas banais

Se algo existe nesta vida
Que algum saber requer
É a ciência de entender
Como pensa uma mulher

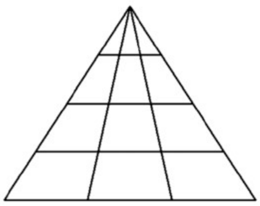
Soluções dos desafios propostos no número anterior:

Na figura a seguir é possível observar 14 quadrados.
Num quadrado $n \times n$, onde n é um número natural qual-



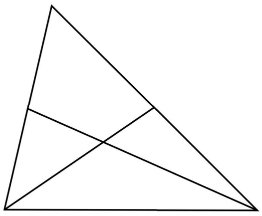
quer, ter-se-iam $\sum_{i=1}^{n} i^2$ quadrados.

Na figura a seguir é possível observar 24 triângulos diferentes.
Se a figura tivesse n "linhas" e m "colunas" (com n e m

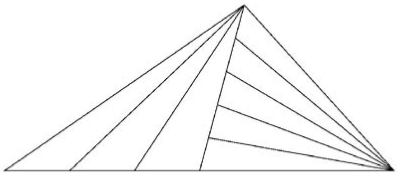


números naturais), ter-se-iam $\sum_{i=1}^{m} n \times i$ triângulos. Em *https://www.youtube.com/watch?v=dNw406ahIWA* pode observar o caso de três "linhas" e nove "colunas".

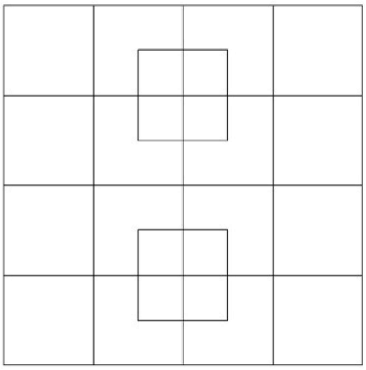
Na figura a seguir podem observar-se oito triângulos.



Na figura a seguir podem observar-se 24 triângulos.



Na figura a seguir podem observar-se 40 quadrados.



Até ao próximo número do nosso Recreio!

[1] *https://www.youtube.com/watch?v=uCsD3ZGzMgE*
[2] *https://mathworld.wolfram.com/JosephusProblem.html*
[3] *https://www.geogebra.org/m/ExvvrBbR*
[4] País ao Minuto, 11 de maio de 2023; *https://www.noticiasaominuto.com/pais/2318437/estranhou-a-chave-do-totoloto-matematicos-nao-tao-provavel-como-outra*
[5] A Bola, 22 de junho 2023; *https://www.abola.pt/nnh/2023-06-22/liga-a-bola-fez-as-contas-saiba-que-equipa-teve-mais-penaltis--nos-ultimos-10-ano/993092*