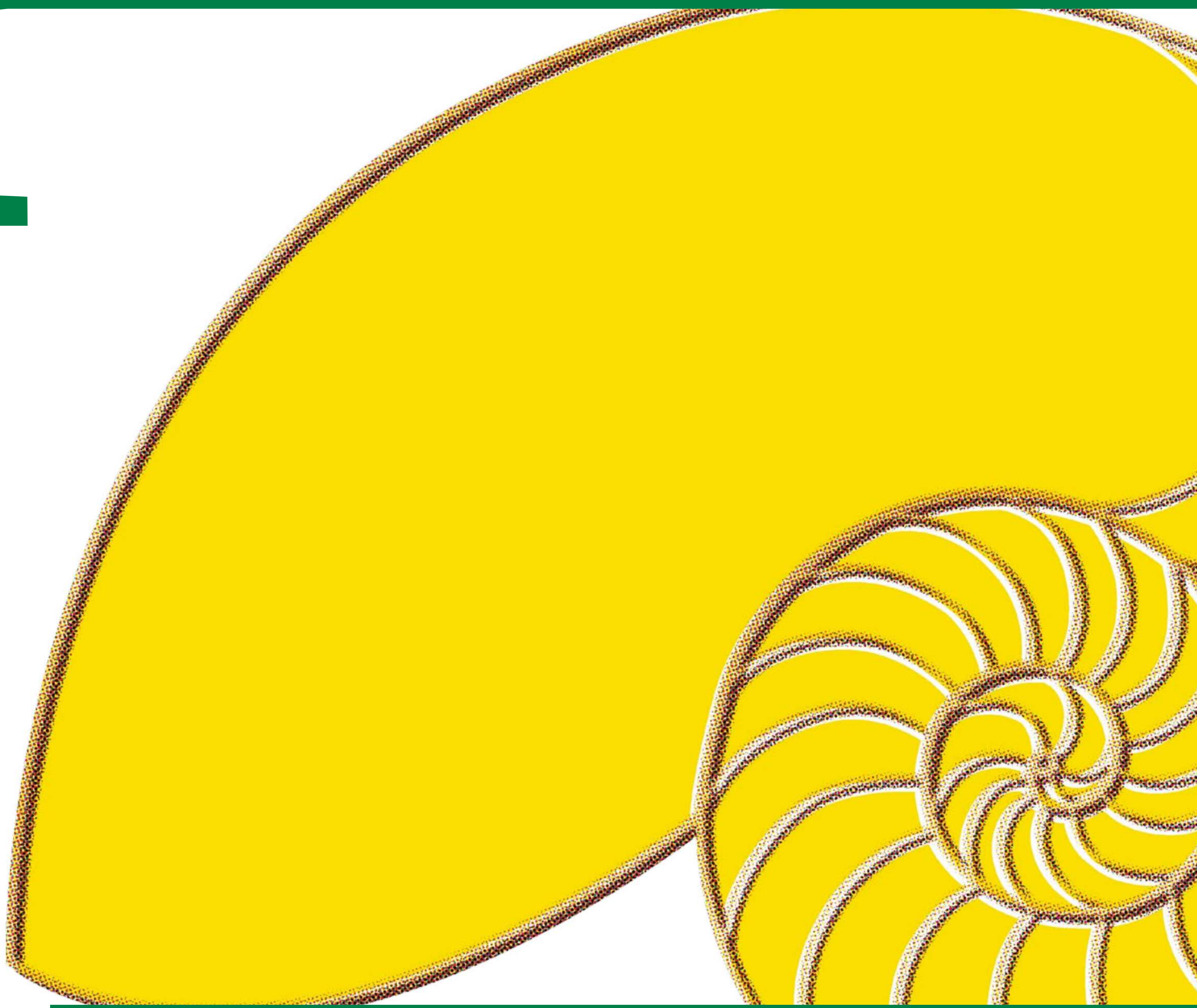

UMA FÓRMULA DE TIPO BINET PARA OS NÚMEROS DE GEONARDO

Catarina Moreira[a], Pedro França[b] e Patrícia D. Beites[c]
Universidade da Beira Interior[a, b]
Dep. de Matemática e Centro de Matemática e Aplicações, Universidade da Beira Interior [c]
catarina.a.moreira@ubi.pt[a], pedro.franca@ubi.pt[b] e pbeites@ubi.pt[c]

O termo "números de Geonardo" – forma abreviada de designar uma generalização dos números de Leonardo criada por P. D. Beites - é inspirado na obra intitulada *Proofs that Reallly Count*, na qual A. T. Benjamin e J. J. Quinn definem os números de Gibonacci – forma abreviada de designar os números de Fibonacci por eles generalizados.

1. A SEQUÊNCIA DE LEONARDO

Uma das mais conhecidas sequências de números inteiros é a de Fibonacci, $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$, definida por:

$$F_0 = 0, F_1 = 1 \text{ e } F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \in \mathbb{N}_0 \text{ tal que } n \geq 2.$$

Outra sequência de números com esta relacionada, estudada por Catarino e Borges em [6], Alp e Koçer em [1] e Beites e Catarino em [4], é a de Leonardo. A sequência de Leonardo, $\{Le_n\}_{n=0}^{\infty}$, é a entrada A001595 em [16] e definida por:

$$Le_0 = Le_1 = 1 \text{ e } Le_n = Le_{n-1} + Le_{n-2} + 1, n \in \mathbb{N}_0 \text{ tal que } n \geq 2.$$

Para $n \in \mathbb{N}_0$, a relação $Le_n = 2F_{n+1} - 1$, que interliga as duas sequências mencionadas, foi referida por Dijkstra em [7] e demonstrada, recorrendo a indução matemática forte, por Catarino e Borges em [6]. O renomeado cientista da computação Dijkstra escreve, em [7], estar a fazer deduções e cálculos absolutamente elementares e desprovidos de interesse científico, mas está interessado em alguns números e precisa das fórmulas! Nesta mesma referência [7], é ainda possível observar a aplicação do Teorema Fundamental das Recorrências Lineares, por Dijkstra, para chegar a uma fórmula fechada para F_n.

A sequência de Leonardo é parte do algoritmo de procura *smoothsort*, em [8], de Dijkstra. Este algoritmo resolve o problema do caminho mais curto entre os vértices de um grafo, sendo o nó de origem escolhido por quem o utiliza e produzindo assim uma árvore de menor custo; funciona apenas com grafos de pesos positivos. É utilizado em artigos recentes, como [10] e [15], realçando assim a sua ainda atual importância. Os números de Leonardo, por serem obtidos por recorrência, tornam o algoritmo mais simples; além disso, a sequência começa em 1 e tem-se a referida restrição aos pesos dos grafos, daí a sua utilização.

2. AS SEQUÊNCIAS DE GEONARDO

Em [3], para cada $a \in \mathbb{N}_0$, a sequência de Geonardo associada a a, $\{Ge_n\}_{n=0}^{\infty}$, é definida por:

$$Ge_0 = Ge_1 = a \text{ e } Ge_n = Ge_{n-1} + Ge_{n-2} + a, n \in \mathbb{N}_0, \text{ tal que } n \geq 2.$$

Os primeiros números da sequência de Geonardo associada a a, ou números de Geonardo associados a a, são a, a, $3a$, $5a$, $9a$, $15a$ e $25a$. Com $a = 1$ obtém-se a definição e os primeiros números da sequência de Leonardo, $\{Le_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Uma estratégia para lidar com recorrências lineares como a de $\{Ge_n\}_{n=0}^{\infty}$ é a utilização do chamado, por Fleischer e Shallit em [9], método dos aniquiladores. A um operador que aniquila uma sequência, ou seja, que a transforma na sequência nula, chama-se aniquilador dessa sequência. O referido método foi explicado nos artigos [11-13] de Jeske e, utilizando o polinómio característico da fórmula de uma recorrência linear, por André e Ferreira em [2].

No que se segue, S denota um operador *shift* ou translação, aplicação linear definida, para qualquer sequência $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$, por $S(s_n) = s_{n+1}$. O operador *shift*, também conhecido como operador de deslocamento de bits em Ciências da Computação, só executa com números positivos, tendo como objetivo fazer o deslocamento de bits de uma expressão do tipo inteiro ou enumeração para a esquerda, denotado como "<<", ou para a direita, denotado como ">>".

Lema 2.1. *O aniquilador de* $\{Ge_n\}_{n=0}^{\infty}$ *é*

$$p(S) = S^3 - 2S^2 + id$$

onde id denota o operador identidade.

Demonstração. Tem-se

$$(S^3 - 2S^2 + id)(Ge_n) = Ge_{n+3} - 2Ge_{n+2} + Ge_n = 0. \quad \square$$

Lema 2.2. Sejam $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Então

$$\phi^2 = \phi + 1,\ \phi\psi = -1,\ \phi + \psi = 1, \tag{1}$$

e

$$\phi^3 - \phi^2 - 1 = -\psi,$$

$$\frac{\phi^2}{\phi^3 + \phi^2 + \phi + 1} = \frac{-\psi}{\phi - \psi},\ \frac{\phi^2 - 2\phi - 1}{\phi^2 - 1} = -1. \tag{2}$$

Demonstração. Tem-se $\phi^2 = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \phi + 1$. As restantes igualdades em (1) podem também ser obtidas por cálculo direto. Invocando (1), em (2) tem-se

$$\phi^3 - \phi^2 - 1 = (\phi + 1)\phi - (\phi + 1) - 1 = \phi - 1 = -\psi,$$

$$\begin{aligned} \phi^2(\phi - \psi) &= (1 + \phi)(\phi - \psi) \\ &= 2\phi - \psi + 2 \\ &= 2(1 - \psi) - \psi + 2 \\ &= 4 - 3\psi \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (\phi^3 + \phi^2 + \phi + 1)(-\psi) &= ((1 + \phi)\phi + 1 + \phi + \phi + 1)(-\psi) \\ &= (3 + 4\phi)(-\psi) = 4 - 3\psi, \end{aligned}$$

$$\frac{\phi^2 - 2\phi - 1}{\phi^2 - 1} = \frac{\phi + 1 - 2\phi - 1}{\phi + 1 - 1} = -1. \qquad \square$$

Teorema 2.3. Sejam $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Então

$$Ge_n = \frac{2a\phi}{\phi - \psi}\phi^n + \frac{-2a\psi}{\phi - \psi}\psi^n - a.$$

Demonstração. Invocando o Lema 2.1 e tendo em conta que ψ, ϕ e 1 são as raízes do polinómio $p(t) = t^3 - 2t^2 + 1$, pelo Teorema Fundamental das Recorrências Lineares, Ge_n pode escrever-se como combinação linear de potências de expoente n de ψ, ϕ e 1:

$$Ge_n = \alpha\phi^n + \beta\psi^n + \gamma, \text{ com } \alpha, \beta \text{ e } \gamma \text{ escalares.}$$

Tomando $n \in \{0, 1, 2\}$ e tendo em conta (1) do Lema 2.2, obtém-se o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = a \\ \phi^2\alpha - \beta + \phi\gamma = a\phi \\ \phi^4\alpha + \beta + \phi^2\gamma = 3a\phi^2 \end{cases},$$

cuja solução única é

$$\alpha = \frac{2\phi}{\phi^3 - \phi^2 + \phi - 1}a,\ \beta = \frac{2\phi^2}{\phi^3 + \phi^2 + \phi + 1}a,\ \gamma = \frac{\phi^2 - 2\phi - 1}{\phi^2 - 1}a.$$

Por (2), novamente, do Lema 2.2, chega-se à fórmula pretendida.

Do Teorema 2.3 tem-se uma fórmula fechada para Ge_n que pode, ainda, ser escrita como

$$Ge_n = 2a\frac{\phi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\phi - \psi} - a.$$

Esta fórmula de tipo Binet[1] para os números de Geonardo foi previamente obtida em [3] de modo distinto, através da fórmula de tipo Binet para os números de Leonardo em [6, Proposition 2.4] e a relação entre Ge_n e Le_n que, por razões de completude, também se demonstra a seguir.

Teorema 2.4. [3] *Para* $n \in \mathbb{N}_0$, $Ge_n = aLe_n$.

Demonstração. Provemos por indução matemática forte em n. Para $n = 0$: $Ge_0 = aLe_0 = a$, logo a igualdade verifica-se; também para $n = 1$: $Ge_1 = aLe_1 = a$. Suponhamos que a igualdade é válida para $k \leq n$ e provemos que também é válida para $k = n + 1$; assim, tendo $Ge_k = aLe_k$ como hipótese e $Ge_{n+1} = aLe_{n+1}$ como tese, vem que:

$$\begin{aligned} Ge_{n+1} = Ge_{n-1} + Ge_n + a &= aLe_{n-1} + aLe_n + a \\ &= a(Le_{n-1} + Le_n + 1) \\ &= aLe_{n+1}. \end{aligned} \qquad \square$$

REFERÊNCIAS

[1] Alp, Y., & Koçer, E. G. (2021). "Some Properties of Leonardo Numbers". *Konuralp Journal of Mathematics*, 9 (1), 183-189.

[2] André, C., & Ferreira, F. (2000). *Matemática Finita.* Universidade Aberta.

[3] Beites, P. D. (2023). "Geonardo Numbers". Submetido.

[4] Beites, P. D., & Catarino, P. (2023). "On the Leonardo Quaternions Sequence". *Hacettepe Journal of Mathematics & Statistics*. Aceite para publicação.

[5] Benjamin, A. T., & Quinn, J. J. (2003). *Proofs that Really Count*. MAA.

[6] Catarino, P., & Borges, A. (2019). "On Leonardo Numbers". *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, 89 (1), 75-86.

[7] Dijkstra, E. W. (1981). "Fibonacci Numbers and Leonardo Numbers". *Dijkstra's handwritten notes, https://www.cs.utexas.edu/users/EWD/ewd07xx/EWD797.PDF*

[8] Dijkstra, E. W. (1982). "Smoothsort, an Alternative for Sorting in Situ". *Science of Computer Programming*, 1, 223-233.

[9] Fleischer, L., & Shallit, J. (2020). "Words with Few Palindromes, Revisited". *Pré-publicação arXiv, https://doi.org/10.48550/arXiv.1911.12464*

[10] Jabbar, L. S., Abbas, E. I., & Hasan, S. D. (2023). "A Modification of Shortest Path Algorithm According to Adjustable Weights Based on Dijkstra Algorithm". *Engineering and Technology Journal*, 41 (2), 1-16.

[11] Jeske, J. A. (1963). "Linear Recurrence Relations - Part I". *Fibonacci Quarterly*, 1 (2), 69-74.

[12] Jeske, J. A. (1963). "Linear Recurrence Relations - Part II". *Fibonacci Quarterly*, 1 (4), 35-39.

[13] Jeske, J. A. (1964). "Linear Recurrence Relations - Part III". *Fibonacci Quarterly*, 2 (3), 197-203.

[14] Marinho, A. (2022). *Curiosidades sobre o Matemático, Físico e Astrónomo Francês Jacques Philippe Marie Binet (1786 - 1856).* Clube de Matemática SPM, *https://clube.spm.pt/news/curiosidades-sobre-o-matemtico-fsico-e-astrnomo-francs--jacques-philippe-marie-binet-1786-1856*

[15] Salem, I. E., Mijwil, M. M., Abdulqader, A. W., & Ismaeel, M. M. (2022). Flight-Schedule Using Dijkstra's Algorithm with Comparison of Routes Findings. *International Journal of Electrical and Computer Engineering*, 12 (2), 1675-1682.

[16] Sloane, N. J. A. (2022). *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. The OEIS Foundation, *https://oeis.org*

Agradecimentos

P. D. Beites agradece ao CMA-UBI (Centro de Matemática e Aplicações, Universidade da Beira Interior), projeto UIDB/00212/2020 da FCT (Fundação para a Ciência e a Tecnologia), e ao CIDTFF-UA (Centro de Investigação em Didática e Tecnologia na Formação de Formadores, Universidade de Aveiro), projeto UIDB/00194/2020 da FCT; um agradecimento especial a J. O. Shallit, pela indicação do método dos aniquiladores e dos artigos do *Fibonacci Quarterly* nas referências. Os autores estão gratos ao revisor e aos editores, pela leitura e pelas sugestões que melhoraram o manuscrito.

[1] As expressões "fórmula de tipo Binet" e "fórmula de Binet" são habitualmente utilizadas para designar uma fórmula fechada (não recursiva) para o n-ésimo termo de uma sequência de números. Trata-se de uma homenagem ao matemático, físico e astrónomo francês Jacques Philippe Marie Binet, [14], quem estabeleceu a chamada fórmula de Binet para os números de Fibonacci: $F_n = \frac{\phi^n-\psi^n}{\phi-\psi}$, [2, 6].

SOBRE OS AUTORES

Catarina Moreira e Pedro França são estudantes das Licenciaturas, respetivamente, em Matemática e Aplicações e em Engenharia Informática, na Universidade da Beira Interior (UBI).

Patrícia D. Deites é Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da UBI, Membro Integrado do CMA-UBI e Membro Colaborador do CIDTFF-UA. Os seus interesses de investigação prendem-se com tópicos de Álgebra, em particular Não Associativa, e de Educação Matemática.