Jorge Nuno Silva
Universidade de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu

CONTAS ROMANAS

A numeração romana é tida como pouco adequada aos cálculos aritméticos. Como mostrou Bernardo Mota no volume 170 desta *Gazeta*, tal não é necessariamente verdade. Vários artigos, como o de Mota, têm chamado a atenção para o facto de os numerais romanos gerarem tabuadas simples, que tornariam as operações exequíveis sem grande esforço. Somos da opinião, no entanto, de que as mesas de cálculo romanas estariam baseadas no uso de pedrinhas – *calculi* – e na organização das quantidades guiada pelas ordens de grandeza dos numerais.[1]

Todos conhecemos bem os numerais romanos – I, V, X, L, C, D, M – que representam sempre as mesmas quantidades, independentemente das posições relativas que ocupem. Estamos, naturalmente, a referir-nos à notação aditiva, deixando de lado a subtractiva. Na primeira, quatro representa-se por IIII, enquanto na segunda se escreve IV, tendo o I um efeito subtractivo. Os métodos que descreveremos adaptam-se facilmente à notação subtractiva, mediante a utilização de pedrinhas de duas cores.

Sendo a soma e a subtracção simples de implementar, vamos abordar a multiplicação por meio de um exemplo. Suponhamos que pretendemos calcular 23 × 16, isto é, XXIII × XVI. Na mesa de cálculo, com as colunas encimadas pelos numerais romanos por ordem crescente da direita para a esquerda, introduzamos o multiplicando na linha cinzenta, representado por duas pedrinhas com valor 10 e três com valor unitário. No bordo da mesa, à direita, temos o multiplicador, um numeral em cada linha (ver figura 1).

Multiplicamos agora cada numeral do multiplicador pelo multiplicando. Cada produto elementar corresponde a um movimento simples de um grupo de pedrinhas (ver figura 2).

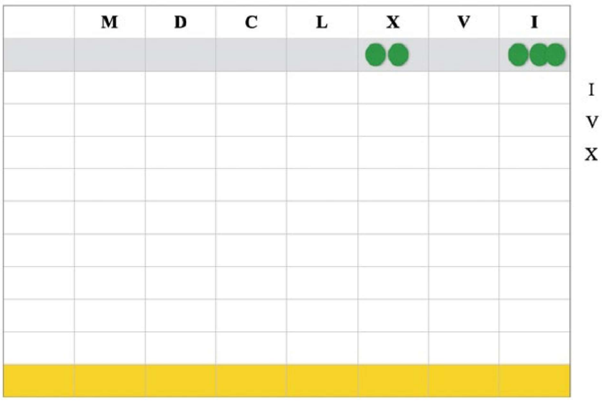

Figura 1. Armando a multiplicação XXIII × XVI.

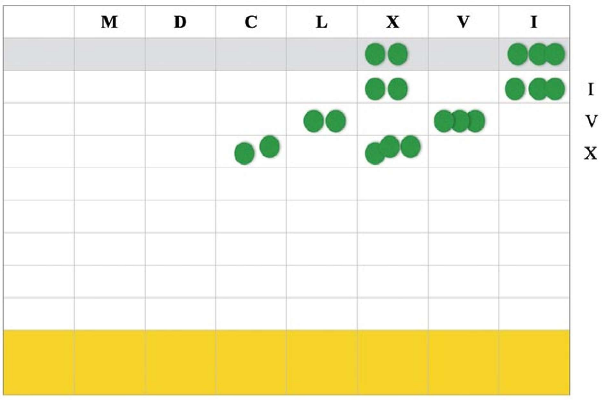

Figura 2. Efectuando XXIII × XVI.

[1] A palavra portuguesa "cálculo" deriva da latina calculus que significava pedrinha, por ser com pedrinhas numa superfície plana que se efectuavam as contas. A expressão "cálculos nos rins" é também de uso corrente, com significado evidente.

Agora, resta proceder às somas, por colunas, pelo que baixamos todas as pedrinhas para a faixa amarela (ver figura 3).

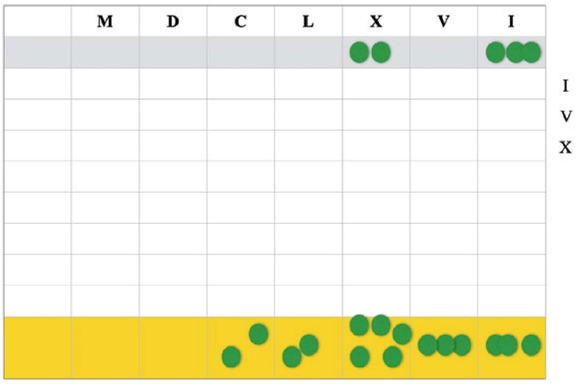

Figura 3. Finalizando o cálculo de XXIII × XVI.

Resta agora simplificar o resultado, de acordo com o protocolo habitual dos numerais romanos (ver figura 4).

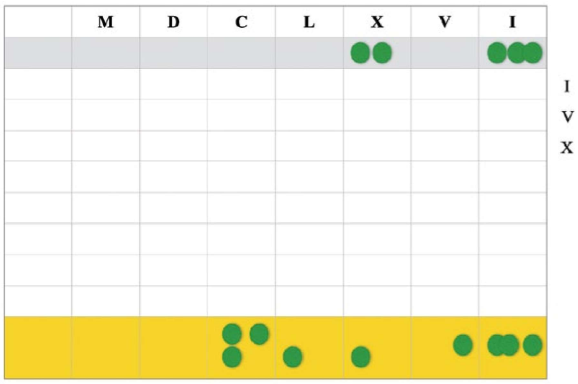

Figura 4. XXIII × XVI = CCCLXVIII.

Os factos elementares da multiplicação – a tabuada – exprimem-se facilmente em amplitudes de deslize de peças neste tabuleiro. Por exemplo, multiplicar por X corresponde a deslizar o multiplicando duas colunas para a esquerda. Deixamos ao leitor a tarefa de examinar os produtos por I, X, C, M. Quando multiplicamos por um numeral do conjunto V, L, D, ... se o multiplicando elementar for uma potência de 10, a operação corresponde ainda a um movimento simples do multiplicando (um salto, três saltos, etc). Contudo, para os produtos entre dois numerais deste tipo (os numerais V, L, D, ... são muitas vezes referidos na literatura por *etruscos*) a interpretação dinâmica é diferente: devemos colocar duas peças no destino expectável e ainda uma peça na casa de denominação imediatamente inferior. Por exemplo, V × L = CCL (ver figura 5).

Cobrimos a tabuada, pelo que estamos preparados para efectuar qualquer multiplicação. Vejamos um último exemplo (um traço sobre um numeral corresponde a multiplicá-lo por mil), 166 × 60, isto é, CLXVI × LX (ver figura 6).

Procedamos aos produtos elementares (ver figura 7).

Efectuando as somas, baixando as peças para a parte amarela, respeitando as colunas e simplificando, obtemos o resultado final, 9960 (ver figura 8).

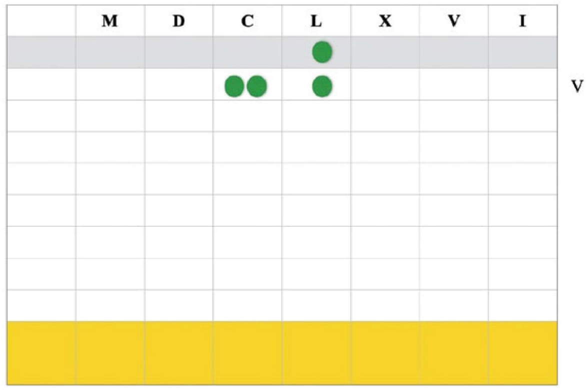

Figura 5. V × L = CCL.

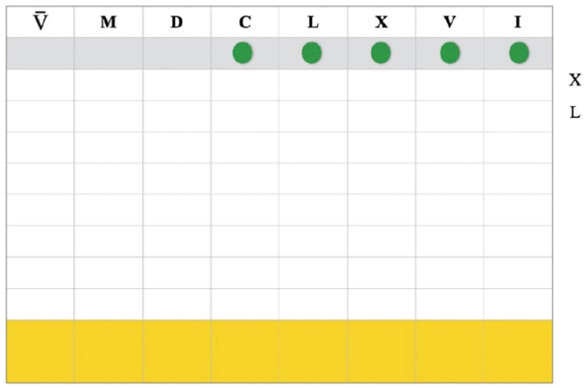

Figura 6. Preparando o cálculo de CLXVI × LX.

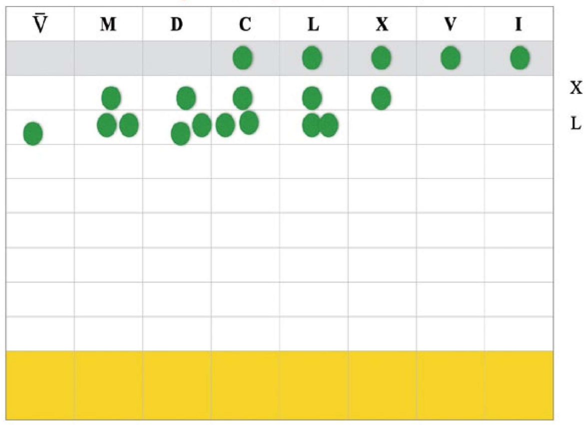

Figura 7. Produtos elementares de CLXVI × LX.

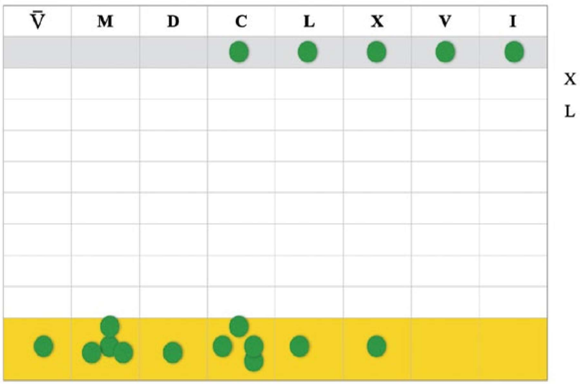

Figura 8. CLXVI × LX.

A divisão pode ser implementada introduzindo duas vezes o dividendo (uma das instâncias será consumida no processo) e constando o divisor na margem da mesa. Vejamos o exemplo DXXXV ÷ VIII (ver figura 9).

Introduzimos o dividendo na parte inferior da mesa, reservando a faixa cinzenta, acima, para o quociente.

Trocando a peça que vale 500 por cinco centenas, obtemos a seguinte representação (ver figura 10).

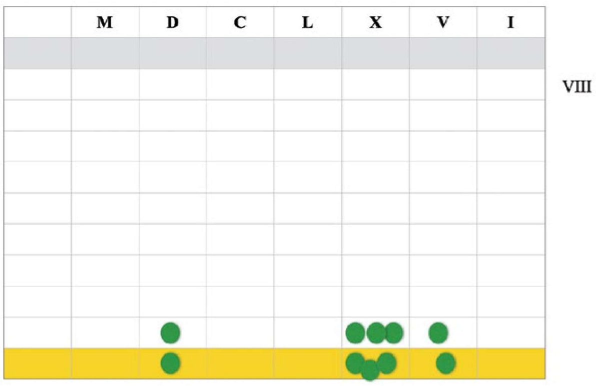

Figura 9. Armando a conta DXXXV ÷ VIII.

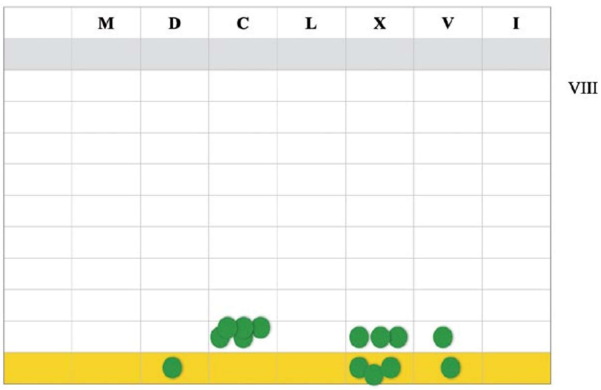

Figura 10. DXXXV ÷ VIII.

Como $8 \times 50 = 400$, podemos retirar 400 do dividendo e introduzir 50 no quociente (ver figura 11):

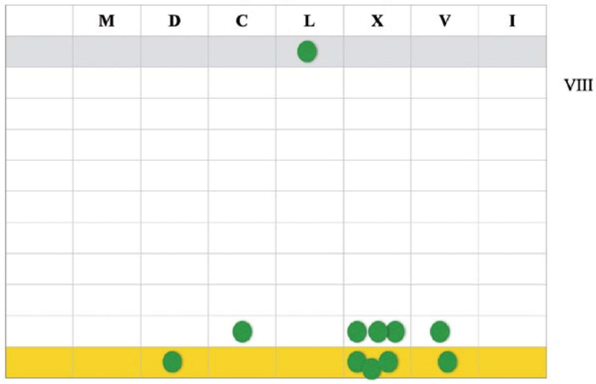

Figura 11. Após a divisão parcial CCCC ÷ VIII.

Repetindo operações elementares desta natureza obtemos a situação final, em que o que resta do dividendo é uma quantidade inferior ao divisor (ver figura 12), o que termina o cálculo, obtendo DXXXV = LXVI × VIII + VII.

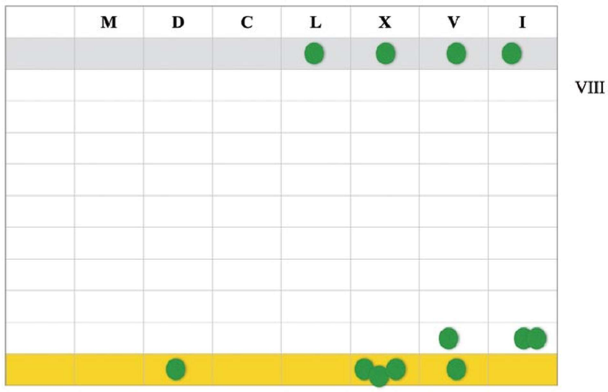

Figura 12. DXXXV = LXVI × VIII + VII.

O método descrito funciona bem e, com mais ou menos esforço, as divisões podem ser levadas a cabo na mesa de cálculo romana.

Vamos descrever um método alternativo para a divisão, a que chamaremos *método especial*, à míngua de melhor designação. Vamos calcular de novo DXXXV ÷ VIII. Para armar a conta, procedemos como acima, mas introduzimos também um *divisor auxiliar simpático* e a diferença entre os dois divisores. Como o divisor original era 8, vamos escolher 10 para o auxiliar (ver figura 13).

Todas as divisões do algoritmo que agora descrevemos terão como divisor o auxiliar (neste caso, 10). Comecemos por dividir 500 por 10. O resultado é 50. Para não falsificar o nosso propósito, após retirar 500, devemos devolver ao

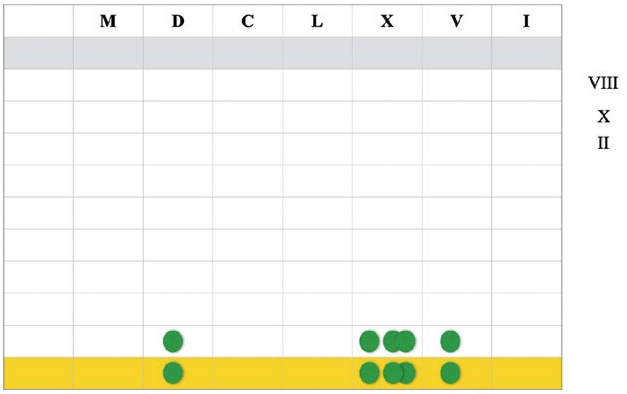

Figura 13. Armando a conta DXXXV ÷ VIII (método especial).

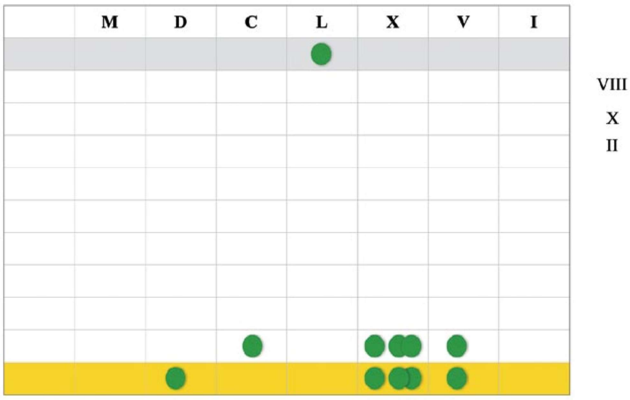

Figura 14. DXXXV ÷ VIII (método especial).

dividendo o produto deste quociente parcelar pela diferença entre os divisores (original e auxiliar), isto é, temos de devolver 50×2=100. Ver figura 14.

Como $100 = 10 \times 10$, retiramos 100 ao dividendo, juntamos 10 ao quociente e devolvemos $10 \times 2 = 20$ ao dividendo (ver figura 15).

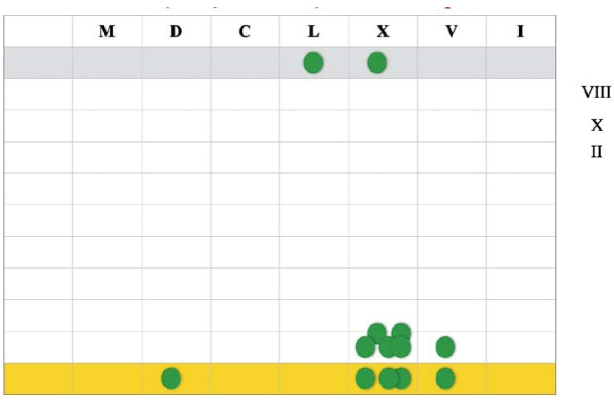

Figura 15. DXXXV ÷ VIII (método especial).

Como 50=5× 10, retiramos 50 ao dividendo, juntamos 5 ao quociente e devolvemos 5×2=10 ao dividendo (ver figura 16).

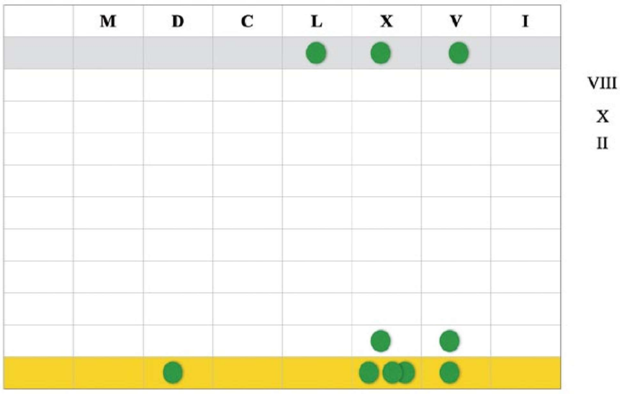

Figura 16. DXXXV ÷ VIII (método especial).

Finalmente, como 10=1×10, retiramos 10 ao dividendo, juntamos 1 ao quociente e devolvemos 1×2=2 ao dividendo (ver figura 17).

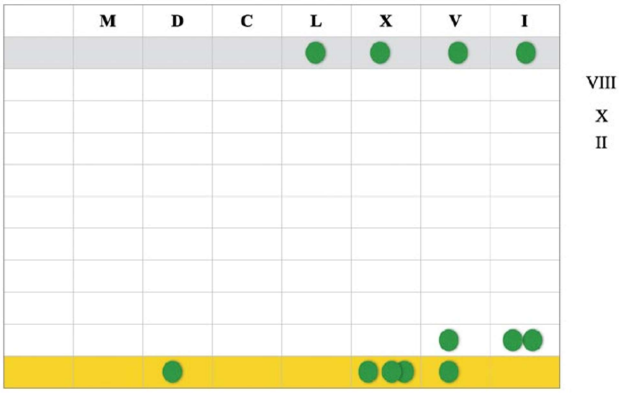

Figura 17. DXXXV = LXVI × VIII + VII.

Este método simplifica muito as operações, principalmente quando o divisor original torna as divisões parciais trabalhosas.

Matematicamente, a justificação do método especial reside na equivalência

$$a = bq + r \Leftrightarrow a + zq = (b + z)q + r$$

que nos permite usar um divisor auxiliar, simpático, $b + z$. No nosso exemplo, tínhamos $a = 535$ e $b = 8$. A potência de 10 mais próxima de 8 é a escolha natural para divisor auxiliar.

A razão que nos leva a admitir que este método pode ter sido usado no âmbito da numeração romana é o facto de ele ser semelhante ao algoritmo *Divisio Ferrea*, atribuído a Gerbert, que se encontra descrito em Bernelin, 2011. Acontece que, no contexto do Ábaco de Gerbert (ver Bernelin, 2011, e Schärlig, 2012), este método faz menos sentido do que na mesa de cálculo romana, o que nos leva a crer que Gerbert o conheceria quando tomou contacto com os numerais indo-árabes e criou o seu ábaco.

Gerbert – o Papa do ano 1000 – ganhou um conhecimento parcial dos métodos aritméticos dos árabes quando teve contacto com eles, por volta de 970 d.C. Só assim se compreende que tenha criado um ábaco, com peças móveis representativas dos novos numerais, mas sem a sofisticação dos métodos de lápis e papel.

O método de divisão *Divisio Ferrea* será, nesta perspectiva, uma adaptação de algo que Gerbert conheceria ao novo mundo da numeração decimal posicional.

Outras fontes relacionadas com este tema podem ser encontradas na lista de referências.

REFERÊNCIAS

Anderson, W. French (1956). "Arithmetical Computations in Roman Numerals". *Classical Philology* 51.3, pp. 145–150. issn: 0009837X, 1546072X.

Bernelin (2011). *Libre d'abaque.* Texte latin établi, traduit et annoté par Béatrice Bakliouche. Notes complémentaires de Jean Cassiut. Après le manuscrit du xie siècle H.491 de la Biliothèque de l'École de Médicine de Montpellier. Cressé: Editions des Régionalismes.

Detlefsen, Michael et al. (1976). "Computation with Roman Numerals". *Archive for History of Exact Sciences* 15.2, pp. 141–148. issn: 00039519, 14320657.

Gavin, J. e Alain Schärlig (2018). *Sept Pères du Calcul Écrit: des Chiffres Romains aux Chiffres Arabes*: 799-1202-1619. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes. isbn: 9782889152780.

Ifrah, G. (2000). *The Universal History of Numbers: From Prehistory to the Invention of the Computer*. Wiley. isbn: 9780471393405.

Karpinski, L.C. (1925). *The History of Arithmetic*. Nineteenth Century Collections Online (NCCO): Science, Technology, and Medicine: 1780–1925. Rand McNally.

Kaub, Shirley Jane (1957). "The Abacus in the Latin Classroom". *The Classical Journal* 53.1, pp. 13–14. issn: 00098353.

Kennedy, James G. (1981). "Arithmetic with Roman Numerals". *The American Mathematical Monthly* 88.1, pp. 29–32. issn: 00029890, 19300972.

Lazarides, Margaret (abr. de 1970). "Quare Multiplicandum Est". *Nature* 226, p. 195.

Lengnink, Katja e Dirk Schlimm (2010). "Learning and understanding numeral systems: Semantic aspects of number representations from an educational perspective". *Philosophy of Mathematics: Sociological Aspects and Mathematical Practice*. Ed. por Benedikt Löwe e Thomas Müller. London: College Publications.

Maher, David W. e John F. Makowski (2001). "Literary Evidence for Roman Arithmetic with Fractions". *Classical Philology* 96.4, pp. 376–399. issn: 0009837X, 1546072X.

Mota, Bernardo (2013). "Fazer Contas com Numerais Romanos". *Gazeta de Matemática* 170, pp. 46–47.

Robertson, Jane I. (1979). "How to Do Arithmetic". *The American Mathematical Monthly* 86.6, pp. 431–439. issn: 00029890, 19300972.

Schärlig, A. (2001). *Compter Avec des Cailloux: le Calcul Élémentaire sur L'Abaque Chez les Anciens Grecs.* Enseignement des mathématiques. Presses polytechniques et universitaires romandes. isbn: 9782880744533.

— (2003). *Compter Avec des Jetons: Tables à Calculer et Tables de Compte du Moyen Age à la Révolution*. Presses polytechniques et universitaires romandes. isbn: 9782880745424.

— (2006). *Compter du Bout des Doigts: Cailloux, Jetons et Bouliers, de Périclès à nos Jours.* Presses polytechniques et universitaires romandes. isbn: 9782880746803.

— (2012). *Un Portrait de Gerbert D'aurillac: Inventeur d'un Abaque, Utilisateur Précoce des Chiffres Arabes, et Pape de L'An Mil.* Presses polytechniques et universitaires romandes. isbn: 9782880749446.

Schlimm, Dirk e Hansjörg Neth (2008). "Modeling Ancient and Modern Arithmetic Practices: Addition and Multiplication with Arabic and Roman Numerals". *Proceedings of the thirtieth annual meeting of the Cognitive Science Society*. Ed. por V. Sloutsky, B. Love e K. McRae. Austin, Texas, USA: Cognitive Science Society.

Smith, D.E. e National Council of Teachers of Mathematics (1995). *Number Stories of Long Ago.* National Council of Teachers of Mathematics. isbn: 9780873534086.

Turner, J. Hilton (1951). "Roman Elementary Mathematics—the Operations". *The Classical Journal* 47.2, pp. 63–108. issn: 00098353.

Coordenação do espaço HISTÓRIAS DA MATEMÁTICA:
Jorge Nuno Silva, Universidade de Lisboa, *jnsilva@cal.berkeley.edu*