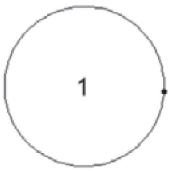
HÉLDER PINTO
Instituto Piaget,
Insight e CIDMA-UA
helder.pinto@ipiaget.pt

O CÍRCULO PARTICIONADO POR CORDAS: O PROBLEMA DO CÍRCULO DE MOSER

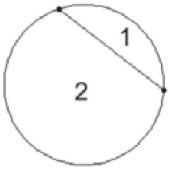
Em quantas partes se pode dividir um círculo usando as cordas definidas por n pontos na sua fronteira?

O problema do círculo de Moser [1, 2] consiste em determinar em quantas partes pode dividir-se um círculo usando todos os segmentos de reta formados por n pontos que estão na respetiva circunferência (exige-se ainda que não haja nenhum ponto dentro do círculo que seja a interseção de mais do que duas destas cordas).

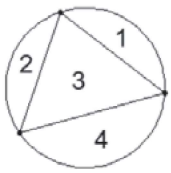
Como é fácil de observar, com $n = 1$, não existe nenhum segmento e, portanto, o círculo fica inteiro numa só parte.



Com $n = 2$, o círculo fica dividido em duas partes.

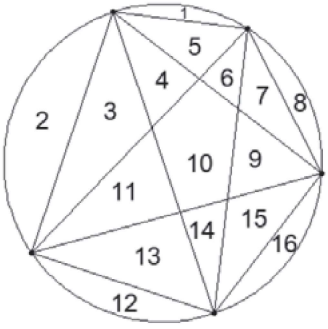


Com $n = 3$, o círculo divide-se em quatro partes.



Com $n = 4$, o círculo divide-se em oito partes.

Com $n = 5$, o círculo divide-se em 16 partes.



E com $n = 6$? A resposta: 32, que apetece dizer na sequência, não é a correta neste problema…

Faça o mesmo exercício para mais alguns valores naturais de n e encontre o termo geral desta sucessão.

Este é um bom exemplo para ilustrar que em matemática não basta verificar algum resultado para muitos exemplos, mas é sempre necessária uma "verdadeira" demonstração para provar para todos. Claro que podemos sempre recorrer a situações que vão ainda mais

além em termos do número de exemplos que verificam a veracidade de uma determinada condição!... Por exemplo, o primeiro número natural para o qual a proposição "$\sqrt{1141n^2+1}$ não é um número inteiro" é falsa é n =30 693 385 322 765 657 197 397 208 (consultar [3] para outras curiosas coincidências em matemática)!

A MATEMÁTICA NAS NOTÍCIAS

1. A matemática da governabilidade e as coligações pré-eleitorais

Atravessámos mais um período de eleições legislativas, nas quais os deputados são eleitos pelo bem conhecido método de Hondt, aplicado em 22 círculos eleitorais. Como é sabido, este método beneficia os grandes partidos em relação ao que aconteceria se fosse aplicada uma simples proporcionalidade direta em função dos votos expressos a nível nacional.

Este método de eleição faz com que as potenciais coligações pré-eleitorais possam fazer diferenças, isto é, com este método a junção das partes pode ser (bem) maior do que a soma aritmética dessas mesmas partes (está-se a supor que quem vota num determinado partido vota sempre na coligação em que este está inserido, o que, como sabemos, não é verdade em Ciência Política…). Em [4] faz-se uma análise, por exemplo, do que teria acontecido se os partidos à esquerda do PS (o Partido Comunista, Os Verdes, o Bloco de Esquerda, o Livre e o PAN) se tivessem coligado antes das eleições de 2019 e de 2022, obtendo os seguintes resultados: 49 deputados coligados em 2019 (em vez dos 36 que efetivamente conseguiram separadamente) e 22 deputados coligados em 2022 (em vez dos 13 separadamente). Com esta opção, os restantes partidos teriam menos lugares e, por exemplo, o PS não teria tido maioria absoluta em 2022 (passaria de 120 deputados para apenas 114). O artigo de opinião [4] termina com a bem conhecida frase de António Guterres "é só fazer as contas…". Já em 2015, em [5], se fazia o mesmo tipo de contas para uma potencial coligação à direita (na eleição de 2011, a coligação PSD-CDS teria tido 137 deputados em vez dos separados $108+24$). E, de facto, a opção escolhida neste ano de 2024 foi pela coligação destes dois partidos (conjuntamente com o PPM).

2. Matemática e as Profissões

A seguir deixamos uma nota para uma notícia recente [6] acerca de uma escola que convidou profissionais de diferentes áreas para falar de matemática:

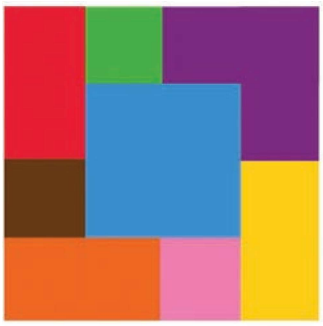
> *"O projeto Matemática e as Profissões, do Agrupamento de Escolas Afonso de Paiva, em Castelo Branco, convidou pais para falarem da sua profissão e do relacionamento com a matemática.*
> *(…)*
> *O Agrupamento de Escolas Afonso de Paiva conta que a aula começou com a apresentação de Susana Caio, que falou sobre os recibos de remunerações, onde mostrou aos alunos como calcular os abonos, descontos e outros conceitos no salário mensal de um trabalhador da função pública. Já Andreia Amaral abordou a profissão de consultora imobiliária, enunciando as quatro etapas que considera mais importantes no seu trabalho e como utiliza a matemática nele. Aprofundou com diversos exemplos essa temática, falando do cálculo de áreas e da determinação do valor de cada imobiliário.*
> *Face ao sucesso desta atividade, irá repetir-se no próximo período."*

Esta iniciativa merece louvores, pois, com poucos recursos e com a colaboração dos pais, consegue mostrar aos seus alunos que a matemática elementar é muito importante no dia a dia de muitos profissionais, mesmo em áreas que não estão diretamente ligadas ao conhecimento científico, tecnológico ou matemático.

3. Quebra-cabeças geométrico

Num dos últimos dias do ano passado (29 de dezembro), o jornal Folha de S. Paulo [7] lançou o seguinte desafio aos seus leitores (retirado originalmente de *https://portaldaobmep.impa.br*):

> *"No último desafio do ano, você precisa encontrar o jeito certo de formar a figura geométrica.*
> *[Considere] Oito papéis quadrados, todos do mesmo tamanho [e diferentes cores], devem ser colocados em cima uns dos outros, para formar a figura abaixo.*
> *Em que ordem você colocaria os papéis?"*



É um bom desafio para trabalhar com crianças mais pequenas uma vez que é possível construir, por exemplo, os oito quadrados em cartolinas coloridas, e as crianças podem experimentar as diferentes figuras que se constroem até obter a solução pretendida. Facilmente, também podem pedir-se muitas outras figuras coloridas seguindo o mesmo princípio.

4. Descobrir a matemática no Museu Gulbenkian

Desde 2 de outubro e até ao próximo dia 30 de junho de 2024, pode visitar a Galeria Principal do Museu Calouste Gulbenkian com os seus alunos dos ensinos Básico e Secundário de modo a encontrar ligações entre a matemática e a arte.

> *"Será que a matemática e a arte estão assim tão afastadas? Ao longo da História sempre houve cruzamentos entre ciência e arte, como podemos constatar pela obra de alguns artistas que aplicaram a matemática no seu trabalho plástico.*
> *Reforçando alguns dos conteúdos abordados nos currículos escolares de cada nível de ensino, e introduzindo conceitos que habitualmente se encontram mais ausentes da esfera curricular, esta é uma visita excecional para o cruzamento interdisciplinar."*

Pode encontrar mais informações em [8].

SOLUÇÕES DOS DESAFIOS PROPOSTOS NO NÚMERO ANTERIOR:

A solução do problema original de Josefo é a seguinte: o sobrevivente está colocado na posição 31. A lista completa ordenada de mortes é a seguinte: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 1, 5, 10, 14, 19, 23, 28, 32, 37, 41, 7, 13, 20, 26, 34, 40, 8, 17, 29, 38, 11, 25, 2, 22, 4, 35, 16, 31.

No problema proposto a seguir, o sábio poderia ter afirmado: "*Vou morrer afogado!*" (em resposta a "*Se você disser uma verdade, será morto por enforcamento; se você disser uma mentira, morrerá afogado.*"). De facto, com esta frase, chega-se a um impasse irresolúvel:

- Se for enforcado, então o sábio disse uma mentira e, portanto, deveria ter sido afogado;
- Se for afogado, então o sábio disse uma verdade e, portanto, deveria ter sido enforcado.

No último problema proposto deve escolher-se a sala 3, uma vez que os leões que não comem há três meses estarão já mortos…

Até ao próximo número do nosso Recreio!

REFERÊNCIAS

[1] *https://mathworld.wolfram.com/CircleDivisionbyChords.html*

[2] *https://www.youtube.com/watch?v=YtkIWDE36qU*

[3] Davis, P. J. (1981). "Are There Coincidences in Mathematics?" *The American Mathematical Monthly*, 88, 311–320. doi:10.2307/2320105. *https://maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/22/Ford/Davis311-320.pdf*

[4] *Público*, 6 de dezembro de 2023; *https://www.publico.pt/2023/12/06/opiniao/opiniao/matematica-governabilidade-coligacoes-preeleitorais-2072719*

[5] *Observador*, 8 de agosto de 2015; *https://observador.pt/2015/08/08/vantagem-psd-cds-irem-eleicoes-coligados-os-numeros*

[6] *Rádio Castelo Branco*, 16 de dezembro de 2023; *https://radiocastelobranco.sapo.pt/ae-afonso-paiva-convidou-pais-para-falar-das-suas-profissoes-relacionadas-com-a-matematica*

[7] *Folha de S. Paulo*, 29 de dezembro 2023; *https://www1.folha.uol.com.br/folhinha/2023/12/desafios-de-matematica-que-bre-a-cabeca-para-colocar-os-papeis-em-ordem.shtml*

[8] *https://gulbenkian.pt/agenda/descobrir-a-matematica-no-museu-gulbenkian*