

Jorge Nuno Silva
Universidade de Lisboa
*jnsilva@cal.berkeley.edu*

# CONTAS EGÍPCIAS

As fracções unitárias, também conhecidas por fracções egípcias, eram as únicas utilizadas no Egipto Antigo, como atestam os vários papiros que nos chegaram de há quase quatro mil anos. Arquimedes usou estes números, assim como Fibonacci, pelo que a sua prática se prolongou por muitos séculos. Um documento célebre, o *Papiro de Rhind*, apresenta uma lista de decomposições em fracções unitárias que tem sido muito estudada, apresentando ainda alguns mistérios. De alguns deles daremos aqui conta.

Comecemos com um quebra-cabeças de origem árabe, muito popular (ver, por exemplo, Gardner 1978 e Tahan 2012, p. 21), em que ocorrem fracções unitárias: Um pai deixou aos seus três filhos a herança de 11 camelos, cabendo $1/2$ do total ao mais velho, $1/4$ ao filho do meio e um $1/6$ ao mais novo. Ao tentar fazer as partilhas, chocaram no facto de a nenhum caber um número inteiro de camelos... Um amigo juntou um camelo à herança e a divisão fez-se: seis para o mais velho, três para o do meio e dois para o mais novo. Como $6+3+2=11$, o amigo recuperou o camelo e todos ficaram contentes.

Há variantes desta recreação, mas nós vamos restringir-nos ao caso em que há três filhos e o amigo dispõe somente de um camelo. Nestas circunstâncias, quantos quebra-cabeças semelhantes podemos formar? Por exemplo, a herança podia constar de sete camelos e ser dividida segundo as fracções $1/2$, $1/4$, $1/8$. Aqui, também o problema não tem solução, mas com a adição de um camelo, passamos a ter oito camelos que dá origem à divisão 4, 2, 1 e, como $4+2+1=7$, o amigo recupera o seu camelo. Intuitivamente, o número de questões semelhantes pode parecer grande, mas só existem sete tais recreações.[1]

Qualquer fracção própria se pode escrever como soma de fracções unitárias de uma forma óbvia, por exemplo $2/5 = 1/5 + 1/5$. Mas os egípcios não admitiam tal repetição. O problema de obter uma decomposição em fracções distintas tem sempre solução e há um algoritmo, descrito por Fibonacci (ver Sigler 2012, pp. 119-126), muito natural. Dada uma fracção $n/m$, $(1 < n < m)$, subtraímos a $n/m$ a maior fracção unitária possível e obtemos uma outra fracção própria. Como Sylvester provou muito mais tarde (ver Sylvester 1880), o numerador desta nova fracção é menor do que $n$, pelo que este método induz um processo que termina sempre. Vejamos um exemplo. Queremos decompor a fracção $4/5$. Temos

$$\frac{4}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

como a maior fracção unitária menor do que $3/10$ é $1/4$, calculamos

$$\frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

e, finalmente, obtemos

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}.$$

Este processo admite uma interpretação geométrica simples. Consideremos a divisão de quatro unidades (quatro rectângulos) por cinco.

[1] Representando as duas instâncias analisadas por (11, 2, 4, 6) e (7, 2, 4, 8), as outras são: (11, 2, 3, 12), (17, 2, 3, 9), (19, 2, 4, 5), (23, 2, 3, 8), (41, 2, 3, 7).

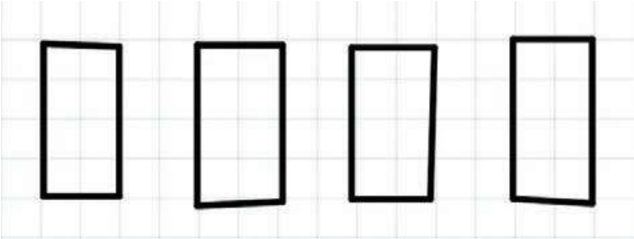

Figura 1. Quatro rectângulos para dividir por 5.

A maior porção que se pode distribuir é a de meio rectângulo. Representemos a azul a porção que cabe a um dos cinco destinatários (e a escuro a porção dos restantes quatro).

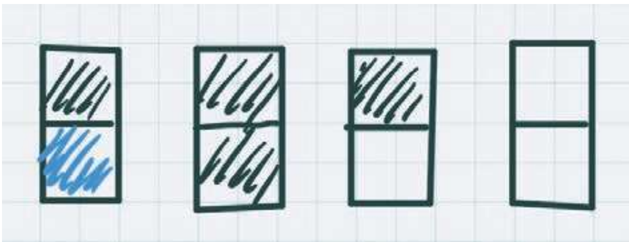

Figura 2. Para já, cabe meio rectângulo a cada um.

Sobraram três meios rectângulos, que são seis quartos de rectângulo, pelo que podemos distribuir cinco deles:

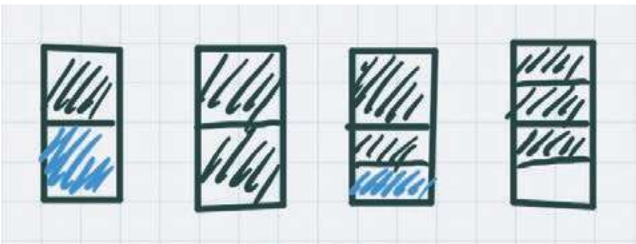

Figura 3. Cada um já recebeu 1/2+1/4.

Finalmente, falta distribuir um quarto de rectângulo por cinco recipientes:

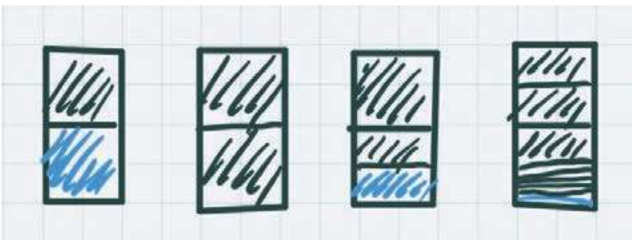

Figura 4. Cada um recebe 1/2+1/4+1/20.

Uma fracção unitária também se pode decompor, nomeadamente mediante a identidade

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m(m+1)}$$

o que mostra que o número de representações de uma fracção em soma de fracções unitárias é ilimitado.

Para compreender o contexto em que as fracções surgem na aritmética egípcia, convém descrever sucintamente as suas técnicas de cálculo. Os egípcios usavam uma base de numeração decimal (não posicional). Tinham símbolos próprios para as potências de 10 e somavam e subtraíam segundo a lógica habitual das ordens de grandeza. Contudo, para multiplicarem dois números, seguiam um algoritmo exemplar. Vejamos um exemplo, retirado do *Papiro de Rhind (PR)* (ver Chace et al. 1929), $19 \times 71$. Vamos construir duas colunas de números, encimadas por 1 e pelo multiplicador. Cada linha a partir da segunda obtém-se por duplicação da linha anterior:

| | |
|---|---|
| 1 | 71 |
| 2 | 142 |
| 4 | 284 |
| 8 | 568 |
| 16 | 1136 |

Terminamos aqui porque o dobro de 16 já excede o multiplicando, 19.

Agora, marcamos os números da coluna da esquerda que somam 19:

| | | |
|---|---|---|
| $\ast$ | 1 | 71 |
| $\ast$ | 2 | 142 |
| | 4 | 284 |
| | 8 | 568 |
| $\ast$ | 16 | 1136 |
| | 19 | |

Então, a soma dos números correspondentes da coluna da direita dá o resultado do produto:

| | | |
|---|---|---|
| $\ast$ | 1 | 71 |
| $\ast$ | 2 | 142 |
| | 4 | 284 |
| | 8 | 568 |
| $\ast$ | 16 | 1136 |
| | 19 | 1349 |

Sim, os egípcios multiplicavam sem saber a tabuada! Bastava-lhes saber duplicar.

Aos nossos olhos, este processo não é mais do que o resultado de combinar a propriedade distributiva da multiplicação relativamente à adição com a representação binária do multiplicando:

$$19 \times 71 = (1 + 2 + 16) \times 71 = 1 \times 71 + 2 \times 71 + 16 \times 71.$$

Note-se que os produtos obtidos, por envolverem potências de dois, calculam-se por duplicações sucessivas.

A divisão usa um método também surpreendente. De novo, recorremos a um exemplo do *PR*, $91 \div 7$. Tendo compreendido que a divisão é a operação inversa da multiplicação, o escriba do papiro sabe que procura um número, $x$ dizemos nós, tal que $x \times 7 = 91$. Mas a multiplicação tem uma explanação conhecida:

$$\begin{array}{cc}
1 & 7 \\
2 & 14 \\
4 & 28 \\
8 & 56 \\
\hline
 & 91
\end{array}$$

Parámos na quarta linha porque na seguinte, o dobro de 56 já excede 91.

Escolhamos agora os números da coluna da direita que somam 91. Os correspondentes da esquerda somarão o quociente pretendido ($91 \div 7 = 13$):

$$\begin{array}{ccc}
1 & 7 & * \\
2 & 14 & \\
4 & 28 & * \\
8 & 56 & * \\
\hline
13 & 91 &
\end{array}$$

Os egípcios dividiam e multiplicavam com essencialmente o mesmo algoritmo e sem usar tabuada!

Claro que as coisas se complicam quando a divisão não é exacta, mas o algoritmo permanece. Eis o cálculo de $35 \div 8$, onde usamos a notação $\overline{n}$ para $1/n$:

$$\begin{array}{ccc}
1 & 8 & \\
2 & 16 & \\
4 & 32 & * \\
\overline{2} & 4 & \\
\overline{4} & 2 & * \\
\overline{8} & 1 & * \\
\hline
4\,\overline{4}\,\overline{8} & 35 &
\end{array}$$

As duplicações terminam na terceira linha e recorre-se a sucessivas passagens à metade, para produzir, na coluna da direita, um conjunto de números que some 35. A soma dos correspondentes da coluna da esquerda dá-nos o resultado pretendido: $4\,\overline{4}\,\overline{8} = 4 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$.

Não é fácil compreender a razão para usar somente este tipo de fracções (a única excepção era $2/3$) e este tipo de decomposições. Talvez um outro problema do *PR* ajude: dividir seis pães por dez pessoas. Um aluno de hoje responderia $3/5$. O escriba do nosso papiro respondeu $\overline{2}\,\overline{10}$. Pragmaticamente, esta resposta é superior, já que é muito mais natural partir cinco pães ao meio e um pão em 10 pedaços do que partir cada um dos seis pães em cinco partes iguais e dar três delas a cada pessoa.

A necessidade de determinar rapidamente dobros de fracções unitárias, representados como somas de fracções unitárias distintas, levou o escriba do *PR* a incluir uma tabela de tais decomposições, para as fracções $2/n$ para todos os valores ímpares de $n$, de 3 a 101:

$$\begin{aligned}
\tfrac{2}{3} &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6} \\
\tfrac{2}{5} &= \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{15} \\
\tfrac{2}{7} &= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{28} \\
&\vdots \\
\tfrac{2}{97} &= \tfrac{1}{56} + \tfrac{1}{679} + \tfrac{1}{776} \\
\tfrac{2}{99} &= \tfrac{1}{66} + \tfrac{1}{198} \\
\tfrac{2}{101} &= \tfrac{1}{101} + \tfrac{1}{202} + \tfrac{1}{303} + \tfrac{1}{606}\,.
\end{aligned}$$

Em geral, o escriba prefere poucas fracções e denominadores não muito grandes em cada decomposição.

Algumas expressões parecem-nos consequência natural das anteriores. Por exemplo, de

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$$

é fácil deduzir

$$\frac{2}{3k} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{6k}$$

e assim ocorre o desenvolvimento

$$\frac{2}{63} = \frac{1}{42} + \frac{1}{126}\,.$$

Um procedimento semelhante, a partir das decomposições de $2/5$, $2/7$ e outras, gera expressões da nossa lista.

Outra abordagem, baseada na identidade

$$\frac{2}{n} = \frac{2}{n}\frac{m}{m}$$

combinada com escolha criteriosa de $m$, produz bons resultados. Por exemplo

$$\frac{2}{7}=\frac{2\,4}{7\,4}=\frac{7+1}{28}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}\,.$$

Nas referências, o leitor interessado poderá encontrar aprofundamentos destas e doutras propostas para compreender a lista das decomposições.

Gostaria somente de chamar a atenção para a última entrada da lista:

$$\frac{2}{101}=\frac{1}{101}+\frac{1}{202}+\frac{1}{303}+\frac{1}{606}\,.$$

O escriba, se quiser transmitir um método geral, só poderá fazê-lo mediante a apresentação de um exemplo generalizável, pois ele não dispõe de linguagem matemática adequada aos enunciados abstractos.

Esta última decomposição é facilmente generalizável:

$$\frac{2}{n}=\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n}+\frac{1}{6n}\,.$$

É como se o escriba estivesse a dizer que, para denominadores superiores a 100, à falta de uma decomposição conhecida, pode sempre recorrer-se a esta, que resolve o problema com quatro fracções...

Esta última identidade demonstra-se em poucos passos, reduzindo a uma só fracção o membro direito da igualdade. O numerador que se obtém é $6+3+2+1$ e o denominador é $6n$. Isto é, o numerador, que é a soma de 6 com os seus divisores próprios, é o dobro de 6. Isto significa que 6 é um *número perfeito*. É exactamente por 6 ser perfeito que tal decomposição funciona.

O primeiro a estudar números perfeitos foi Euclides, que deduziu uma expressão que gera números perfeitos pares (ver Fitzpatrick e Heiberg 2007, p. 277), mas aqui no documento egípcio vemos surgir uma sua aplicação: a cada número perfeito está associada uma decomposição em fracções unitárias distintas de qualquer fracção do tipo $2/n$.

Euler provou que a expressão de Euclides gera, de facto, todos os números perfeitos pares (ver Euler 1849), mas há ainda questões sobre estes números por esclarecer. Não sabemos se há uma infinidade de números perfeitos e nunca ninguém viu um número perfeito ímpar. Haverá algum?

Costuma dizer-se que a matemática nasceu na Grécia, por aí terem florescido os primeiros cultores da tradição dedutiva desta área do saber. Mas as suas raízes fazem-nos recuar vários milénios e deixam-nos apreciar o engenho dos antigos, que talvez não devamos considerar completamente ingénuos na matéria.

## REFERÊNCIAS


[1] Abdulaziz, A.A. (2008). "On the Egyptian Method of Decomposing $2/n$ into Unit Fractions". Em: *Historia Mathematica* 35.1, pp. 1–18. issn: 0315- 0860. doi: *https://doi.org/10.1016/j.hm.2007.03.002*.

[2] Chace, A.B. et al. (1929). *The Rhind Mathematical Papyrus. [British Museum 10 057 and 10 058]*. Mathematical Association of America.

[3] Clagett, M. (1989). "Ancient Egyptian Science: Ancient Egyptian mathematics". *Ancient Egyptian Science: A Source Book : Knowledge and Order*. American Philosophical Society. isbn: 9780871692320.

[4] Euler, L. (1849). "De Numeris Amicibilibus". Em: *Commentationes arithmeticae*, pp. 627–36.

[5] Fitzpatrick, R. e J. L. Heiberg (2007). *Euclid's Elements*. Richard Fitzpatrick. isbn: 9780615179841.

[6] Gardner, M. (1978). "Mathematical Games: Puzzles and Number-theory Problems Arising from the Curious Fractions of Ancient Egypt". Em: *Scientific American*. Outubro, pp. 23–30.

[7] Gillings, R.J. (1982). "Mathematics in the Time of the Pharaohs". *Dover Classics of Science and Mathematics*. Dover. isbn: 9780486243153.

[8] Neugebauer, O. (1969). "The Exact Sciences in Antiquity". *Acta Historica Scientiarum Naturalium et Medicinalium*. Dover Publications. isbn: 978048- 6223322.

[9] O'Reilly, D. (1992). "Creating Egyptian Fractions". Em: *Mathematics in School* 21.5, pp. 40–42. issn: 03057259.

[10] Robins, G. e C. Shute (1987). *The Rhind Mathematical Papyrus: An Ancient Egyptian Text*. Trustees of the British Museum. isbn: 9780714109442.

[11] Sigler, L. (2012). *Fibonacci's Liber Abaci: A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*. Sources and Studies in the History of Mathema-

tics and Physical Sciences. Springer New York. isbn: 9781461300793.

[12] Sylvester, J.J. (1880). “On a Point in the Theory of Vulgar Fractions”. Em: *American Journal of Mathematics* 3.4, pp. 332–335. issn: 00029327, 10806377.

[13] Tahan, M. (2012). *O homem que calculava*. Rio de Janeiro: Editora Record. isbn: 9788501061966.

[14] van der Waerden, B.L. (1965). *Science Awakening*. Noordhoff.

[15] — (1980). “The (2:n) Table in the Rhind Papyrus”. Em: *Centaurus* 23.4, pp. 259–274. doi: *https://doi.org/10.1111/j.1600-0498.1980.*tb00234.x. eprint: *https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1111/j.1600-0498.1980.tb00234.x.*