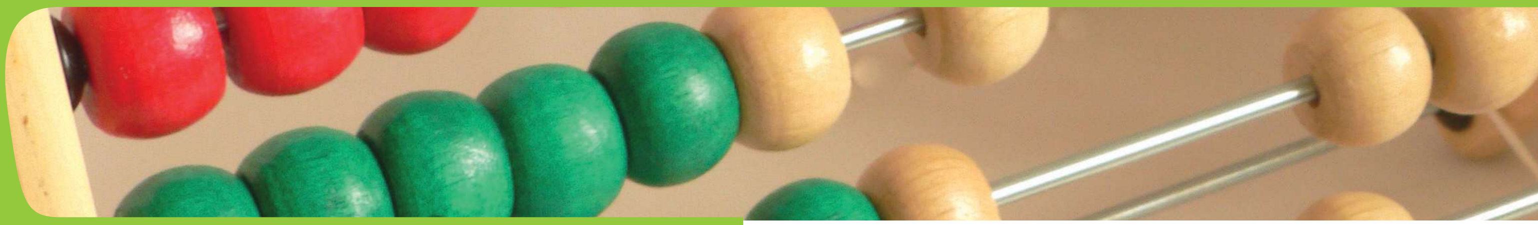




Hélder Pinto
Instituto Piaget,
Insight e CIDMA-UA
*helder.pinto@ipiaget.pt*

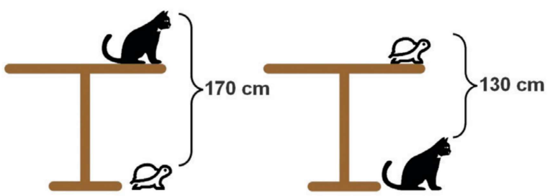
# O PROBLEMA DO GATO E DA TARTARUGA QUE SOBEM A MESAS (E OUTROS PROBLEMAS ALGÉBRICOS)

Como determinar a altura de uma mesa quando se tem dois animais de estimação?

Nem sempre é fácil descobrir a verdadeira origem de um determinado desafio matemático, sendo possível encontrar várias fontes para o mesmo problema (e com o advento da *web*, este problema da fonte original agudizou-se exponencialmente). Por exemplo, o problema que trazemos a seguir é referenciado muitas vezes como sendo da China, embora algumas vezes apareça como originário da Rússia, como em [1]:

> *Um gato está sentado em cima de uma mesa e uma tartaruga rasteja no chão, diretamente por baixo dele. A distância entre as orelhas do gato e o topo da carapaça da tartaruga é de 170 cm. A Alena trocou os animais de estimação de sítio. Agora, a distância entre as orelhas do gato e o topo da carapaça da tartaruga é de 130 cm. Qual é a altura da mesa?*

Não abordaremos aqui por que carga de água se conhecem as distâncias entre o topo dos animais e não se mediu diretamente a altura da mesa… (o que se ganha em interesse matemático e algébrico perde-se muitas vezes na "veracidade" das situações na vida real!). Na plataforma *Reddit*, para este mesmo problema, questionava-se ainda se é possível determinar a altura dos dois animais. O que parece ao leitor?




De facto, muitas vezes não se questiona o valor de uma variável específica, mas sim o resultado de uma determinada expressão que utiliza essas variáveis. Observe-se o exemplo a seguir, onde determinar o valor das variáveis diretamente e calcular a expressão pelos métodos usuais é bastante trabalhoso.

Se $a+b=1$ e $a^2+b^2=2$, qual o valor da expressão $a^{11}+b^{11}$?

Em certas situações, é até mesmo impossível determinar o valor exato das variáveis como, por exemplo, no problema a seguir (como bem sabe o leitor, uma equação com duas incógnitas não tem solução única):

$$\text{Se } x+xy+y=54, \text{ a que é igual } x+y?$$

Na mesma senda das situações anteriores, determine as soluções inteiras dos seguintes sistemas de equações:

$$1)\begin{cases} ab+c=2020 \\ abc=2021 \end{cases};$$

$$2)\begin{cases} ab+c=2023 \\ abc=2022 \end{cases}.$$

## A MATEMÁTICA NAS NOTÍCIAS:

**1. Ainda a matemática das eleições: "Enganos nas eleições? Votos no ADN podem ter tirado três deputados à AD"**

Como já falámos noutras edições deste *Recreio*, os deputados do Parlamento português são eleitos pelo bem conhecido método de Hondt, aplicado em 22 círculos eleitorais. Como também já foi referido, este método beneficia os grandes partidos em relação ao que aconteceria se fosse aplicada uma simples proporcionalidade direta em função dos votos expressos a nível nacional. Uma consequência deste método está bem visível no que aconteceu nas últimas eleições legislativas em que se supõe (embora não haja maneira de confirmar a veracidade desta afirmação, uma vez que o voto é anónimo) que muitos eleitores tenham votado no partido ADN por engano, quando o que pretenderiam era votar na coligação AD (note-se que, no boletim de voto, esta coligação era indicada por ALIANÇA DEMOCRÁTICA PPD/PSD.CDS-PP.PPM, não aparecendo a sigla AD em local nenhum). Claro que alguém fez os cálculos matemáticos desta potencial situação [2]:

> *"A [Rádio] Renascença fez um exercício meramente matemático, aplicando o Método d'Hondt, (…) o que permitiria à AD de Luís Montenegro tirar dois deputados ao PS – um em Lisboa e outro em Viseu – e um ao Chega, em Coimbra.*
>
> *Em Lisboa, o ADN conseguiu 19 mil votos (1,45%), ou seja, mais 16 mil do que o partido tinha conseguido nas eleições anteriores. O número era o suficiente para a AD conseguir o seu 15.º deputado e ultrapassar o PS como o partido mais votado no círculo eleitoral.*
>
> *Em Viseu, um dos círculos onde o ADN foi o 4.º partido mais votado, o partido conseguiu mais de 6 mil votos (3,13%), quando há dois anos tinha sido o 13.º partido mais votado nas legislativas de 2022. Estes votos seriam o suficiente para a coligação de PSD e CDS conquistar o 4.º deputado no círculo, às custas do 3.º do PS.*
>
> *O terceiro deputado que o ADN terá desviado da AD foi em Coimbra. O partido teve 1% dos votos, cerca de 2.400, quando há dois anos o partido não tinha sequer listas no círculo eleitoral. O último deputado no distrito foi eleito por uma diferença de pouco mais de 800 votos, o 2.º do Chega, que, com os votos no ADN, serviriam à AD [para] eleger o 4.º deputado no distrito."*

E, claro, têm-se então os seguintes "paradoxos" que não fazem muito sentido ao nosso senso comum:

- O ADN não conseguiu eleger nenhum deputado, mas os seus votos permitiriam à AD eleger mais três deputados…
- O PS e o Chega, que nada têm a ver com este eventual engano (isto é, teriam exatamente o mesmo número de votos que tiveram), acabariam por perder deputados…

E é neste tipo de questões que nasce, em parte, a questão do designado "voto útil" … Os votos num partido pequeno não elegeram ninguém (como se costuma dizer, não serviram para nada); num partido grande teriam feito a diferença elegendo mais três deputados; relembre-se que, no final, os resultados deram 80 deputados à AD contra 78 do PS (recorde-se que se esteve vários dias à espera que se contassem os votos dos imigrantes, que viriam a eleger quatro deputados, para se conseguir garantir matematicamente a vitória da AD, tendo o então primeiro-ministro, António Costa, afirmado a inesquecível frase: "A matemática é matemática, creio que ninguém discute com a matemática" [3]); segundo as contas agora feitas, teriam ficado então 83 deputados para a AD contra 76 do PS, o que teria sido uma vitória bem mais substancial do que a que se verificou na realidade (embora, no final, viéssemos a estar exatamente na mesma situação em termos de possíveis maiorias parlamentares).

**2. A simulação do Euro 2024 (e desta vez não é a simulação de um penálti)**

Quando sair esta edição da nossa *Gazeta* (em julho) já é provável que se saiba como está a correr-nos o Europeu de Futebol na Alemanha. No momento em que escrevo estas linhas (maio), contudo, já existem previsões do que poderá vir a acontecer [4]:

> *"Estamos a caminhar a passos largos para o Euro 2024 e, de maneira a aguçar ainda mais a curiosidade para aquilo que poderá acontecer na competição, o criador de conteúdo James Lawrence Allcott resolveu fazer uma simulação da prova dez mil vezes. É certo que alguns dos resultados surpreendem, mas o grande destaque vai mesmo para Portugal, que foi a seleção que saiu... com maior chance de conquistar o troféu.*
>
> *(…)*
>
> *No que diz respeito ao torneio como um todo, a Seleção Nacional terminou a simulação com 14.74% de chance de sair vitoriosa, à frente de Inglaterra (11.48%), Espanha (10.99%), França (10.85%) e Bélgica (7.76%). Curiosamente, a Alemanha, a anfitriã do Euro 2024, surge apenas em 6.º (5.76%)."*

A vantagem de se fazer uma simulação deste género é que já se entra em linha de conta com os eventuais "percursos" que cada equipa tenha de fazer até ser campeã; por exemplo, Portugal, fruto do seu grupo (que é relativamente fácil, com Turquia, Chéquia e Geórgia), venceu o seu adversário dos oitavos de final em 95,82% das simulações.

Será que a simulação deu "resultados" para Portugal? Para ser justo, as probabilidades estão tão diluídas e há tantas equipas candidatas que, qualquer que venha a ser a equipa vencedora, dificilmente teremos um vencedor totalmente inesperado... Apesar desta simulação, não se descarte a sempre candidata Alemanha, pois, como se costuma dizer: "o futebol são 11 contra 11 e no fim ganha a Alemanha"!

**3. "Educação matemática para o nosso subdesenvolvimento"**

Que título tão estranho, quando estamos habituados a associar a matemática a desenvolvimento científico e económico… A seguir segue parte da opinião de José Miguel Pinto dos Santos sobre este assunto [5]:

> *"Tornar um tópico aborrecido não requer grande competência pedagógica ou científica. Mas tornar a aprendizagem da matemática algo de abominável, de modo a que o puto fique vacinado para sempre, com uma sensação indelével de que é algo de arbitrário e que não serve para nada de bom, requer alguma arte.*
>
> *Um dos métodos usados com grande sucesso nas nossas escolas públicas para prevenir o desenvolvimento intelectual das crianças e as afastar do vício da matemática é exigir uniformidade nas respostas aos problemas dados. É comum um problema algébrico ou geométrico poder ser resolvido de vários modos. Para matar pela raiz qualquer veleidade de criatividade e independência intelectual, é normal os nossos professores considerarem errada qualquer resposta com desenvolvimento lógico e resultado correto, mas que não tenha sido obtida seguindo o processo de resolução que foi dado em aula. Para passar a Matemática nas escolas portuguesas, os alunos têm de internalizar que, na nossa sociedade, é necessário conformarem-se com a maneira de pensar imposta pela autoridade. A lógica pode ser impecável, o resultado pode ser o correto, mas se a maneira de resolver o problema ou o modo de pensar não for o oficial, então "estás errado e és reprovado". Chumbas até aprenderes. Repetes até te conformares."*

Bem sabemos que a matemática escolar por vezes é aborrecida e tem dificuldade em mostrar diferentes perspetivas e apresentar diferentes abordagens de resolução de um determinado problema (até porque, muitas vezes, os problemas escolares são relativamente simples e não há muita maneira de inovar). E bem sei que nos exames nacionais a questão apresentada é premente para alguns estudantes que, porventura, tenham mais capacidades e conhecimentos, como, por exemplo, os estudantes que fazem uma preparação específica para as Olimpíadas de Matemática. Contudo, ver nesta situação uma tentativa sub-reptícia da escola de reprimir os seus estudantes e os tornar seres conformados com o *statu quo* parece-me manifestamente exagerado... De facto, esta questão parece-me que nasceu de uma tentativa de quantificar tudo, numa tentativa de ser o mais rigoroso e justo possível na avaliação dos exames. Dizia-me um amigo que os critérios de correção são de tal forma pormenorizados que, por vezes, existem alunos com notas bastante razoáveis não tendo sequer acertado um único exercício de início ao fim…

Da minha parte, deixo já aqui a indicação de que, por vezes, também faço isso de "forçar" certos métodos de resolução:

- Quando peço para resolver um sistema pelo método da adição ordenada (e não pelo método de substituição, que eles costumam preferir); aqui o conteúdo é o método em si e não a solução do sistema propriamente dita;
- Quando proíbo explicitamente de usarem a fórmula resolvente das equações do 2.º grau nas equações incompletas (por causa da tão esquecida "elegância matemática", que "não nos deixa" usar um canhão para matar uma simples mosca).

O que se pretende com estas duas situações acima é dar aos estudantes mais opções, mais ferramentas matemáticas, para que, no futuro, possam ser criativos (e críticos). Para quê aprender o método da adição ordenada "se já me safo muito bem com o da substituição"? Se de início não forçamos a aprendizagem de outros métodos, dificilmente os estudantes terão mais tarde a destreza e a intuição para perceberem que nalguns casos dá mais jeito um método do que o outro.

E de facto, para finalizar, quero crer que os nossos professores de Matemática, em geral, sabem bem acarinhar e apadrinhar os seus alunos mais criativos e com mais potencialidades, preparando-os da melhor maneira possível quer para os exames, quer para os seus posteriores estudos superiores.

**SOLUÇÕES DOS DESAFIOS PROPOSTOS NO NÚMERO ANTERIOR:**

A solução para o problema do Círculo de Moser (Em quantas partes pode dividir-se um círculo, usando todos os segmentos de reta formados por n pontos que estão na respetiva circunferência?) com $n = 6$ é 31. Para $n = 7$ é 57. A solução geral ($n \in \mathbb{N}$) é dada pela seguinte expressão:

$$\frac{n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24}{24}.$$

Em [6] podem encontrar-se três formas de demonstrar que esta expressão é a resposta ao problema pretendido: uma usando argumentos combinatórios, outra usando a fórmula de Euler para grafos planos e a última usando equações diferenciais.

Voltando à questão da criatividade em matemática, este é um bom exemplo de como se pode chegar ao mesmo resultado usando diferentes técnicas, aproveitando ainda para vos deixar as duas últimas frases deste artigo: "*This article illustrates how a classical problem can lead to different and creative developments. That is what makes mathematics so exciting.*" ([6], p. 11).

Até ao próximo número do nosso *Recreio*!


[1] *The Guardian*, 13 de dezembro de 2021; *https://www.theguardian.com/science/2021/dec/13/did-you-solve-it-from-russia-with-logic*

[2] *Rádio Renascença*, 11 de março de 2024; *https://rr.sapo.pt/noticia/politica/2024/03/11/enganos-nas-eleicoes-votos-no-adn-podem-ter-tirado-tres-deputados-a-ad/370348*

[3] *Expresso*, 12 de março de 2024; *https://expresso.pt/politica/eleicoes/legislativas-2024/2024-03-12-Potencial-vitoria-do-PS--com-votos-por-apurar--A-matematica-e-matematica-creio-que--ninguem-discute-com-a-matematica-diz-Costa-646f4f33*

[4] *Record*, 27 de abril de 2024; *https://www.record.pt/internacional/competicoes-de-selecoes/europeu/euro-2024/detalhe/portugal-favorito-a-conquista-do-euro2024-numa-simulacao-feita-10-mil-vezes*

[5] *Observador*, 18 de dezembro de 2023; *https://observador.pt/opiniao/educacao-matematica-para-o-nosso-subdesenvolvimento/*

[6] Lucatero, C. R. (2017). *The Moser's Formula for the Division of the Circle by Chords Problem Revisited.* arXiv preprint arXiv:1701.08155