



JOSÉ CARLOS SANTOS  
Universidade  
do Porto  
jcsantos@fc.up.pt

## O PROBLEMA DOS TRÊS CORPOS

Uma série recente da Netflix, *3 Body Problem*, atraiu bastante atenção. Esta série é baseada num romance com o mesmo título. Neste texto, iremos ver a que é que o título se refere.

O *Problema dos Três Corpos* é um romance de ficção científica, da autoria do autor chinês Liu Cixin, publicado originalmente sob a forma de livro (em chinês) em 2008.<sup>1</sup> Uma tradução para inglês do romance foi publicada em 2014 (veja-se [2]) e foi galardoada com o prestigiado prémio Hugo, que se destina a obras de ficção científica. Foi adaptado a uma série televisiva (*3 Body Problem*), que pode ser vista na Netflix.

O título do romance refere-se a um famoso problema, o problema dos três corpos. Vejamos do que é que se trata.

A lei da gravitação universal afirma que quaisquer dois objetos se atraem um ao outro com uma força inversamente proporcional ao quadrado da distância que os separa. Esta lei é geralmente associada a Isaac Newton, embora não tenha sido ele a primeira pessoa a tê-la enunciado. Com efeito, já tinha sido sugerida pelo astrónomo francês Ismaël Bullialdus em 1645, bem como pelo matemático italiano Giovanni Alfonso Borelli em 1666. Um contemporâneo de Newton, Robert Hooke, escreveu mesmo, em 1670, que “todos os corpos celestes têm uma atração ou um poder gravitacional na direção dos seus centros”<sup>2</sup> e sabe-se que Hooke era da opinião de que a intensidade desse poder gravitacional era inversamente proporcional ao quadrado da distância. A grande contribuição de Newton para a lei da gravitação universal consistiu em provar que as leis de Kepler<sup>3</sup> eram uma consequência daquela lei.

Em particular, a primeira lei de Kepler, segundo

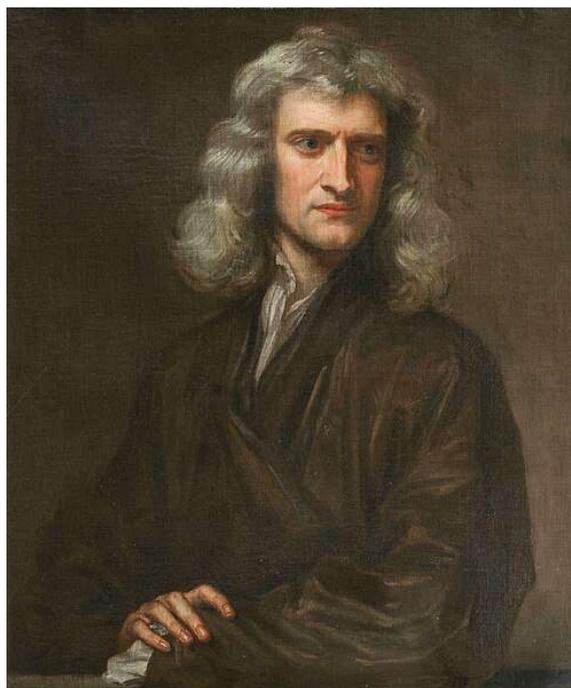


Figura 1. Isaac Newton.

a qual as órbitas dos planetas são elípticas, estando o Sol num dos seus focos, é uma consequência da lei da gravitação. Isto resolve então o chamado *problema dos dois corpos*: sabendo que dois corpos se atraem mutuamente através de uma força inversamente proporcional ao quadrado da distância, qual é a trajetória que eles

seguem? Ao contrário do que normalmente se pensa, não é verdade que o corpo menos maciço percorre uma órbita elíptica em torno do outro; o que acontece é que *ambos* os corpos seguem trajetórias elípticas em torno do centro de massa comum. Mas, por exemplo, no caso do par formado pela Terra e pelo Sol, esse centro de massa fica no interior do Sol, pelo que, para efeitos práticos é razoável afirmar que a Terra orbita em torno do Sol. Temos algo análogo para o par formado pela Lua e pela Terra. Só que nem sempre é assim. Por exemplo, o centro de massa do sistema formado por Plutão e pelo seu maior satélite, Caronte, fica fora de Plutão.

E quando há três corpos, tal como, por exemplo, o Sol, a Terra e a Lua? O problema dos três corpos consiste em encontrar o movimento de três corpos sabendo que cada um deles atrai qualquer um dos outros dois através de uma força inversamente proporcional ao quadrado da distância. Newton foi a primeira pessoa a estudar este problema (veja-se [5, cap. 10]). Uma conclusão que tirou rapidamente foi a de que a primeira lei de Kepler, embora seja válida para um sistema solar que consiste num único planeta que gravita em torno de uma estrela, só é aproximadamente válida em geral, pois o movimento de cada planeta em torno do Sol é também afetado, em maior ou menor grau, por todos os restantes planetas. Isto é irónico, uma vez que foi a compatibilidade entre as leis de Kepler e a lei da gravitação universal que levou à aceitação desta última.

O próprio Newton estudou o problema dos três corpos no caso do sistema formado pelo Sol, pela Terra e pela Lua e usou os resultados obtidos a fim de conseguir previsões mais fiáveis relativas à posição da Lua no céu. Mas, contrariamente ao que aconteceu com o problema dos dois corpos, nunca conseguiu resolver o dos três corpos.

Nem Newton nem ninguém que tenha vindo a seguir a ele. Os matemáticos fizeram então o que costumam fazer nesta situação: já que não conseguiam resolver o problema em geral, começaram a resolvê-lo em casos particulares. Euler encontrou soluções do problema dos três corpos nas quais os três objetos são colineares, enquanto Lagrange encontrou soluções nas quais os três objetos formam os vértices de um triângulo equilátero.<sup>4</sup> Também abordaram o problema no caso em que um dos objetos tem uma massa muito mais pequena do que os restantes (o chamado problema restrito dos três corpos).

Em 1884, o rei Oscar II da Suécia, que fora um brilhante estudante de matemática na sua juventude, patrocinou



Figura 2. Henri Poincaré

um prémio de matemática para celebrar o seu sexagésimo aniversário, que teria lugar em 1889. O vencedor receberia uma medalha de ouro e 2500 coroas suecas. A comissão encarregada de avaliar os trabalhos recebidos consistiu em Gösta Mittag-Leffler (o matemático sueco mais conceituado daquela época), Karl Weierstrass e Charles Hermite (veja-se [1]). O prémio foi atribuído a Henri Poincaré pelo seu trabalho “Sobre o Problema dos Três Corpos e as Equações da Dinâmica”. Estava previsto que o trabalho fosse publicado na revista *Acta Mathematica*. Um dos editores daquela revista, Edvard Phragmén, ficou encarregado de rever o manuscrito para publicação e ficou intrigado com diversas passagens. O que não é de espantar, pois, como escreveu mais tarde Jean Dieudonné (veja-se [3]),

<sup>1</sup> Fora publicado de forma seriada dois anos antes.

<sup>2</sup> *Who Really Discovered the Law of Gravity?* <https://www.sciencefocus.com/science/who-really-discovered-the-law-of-gravity>

<sup>3</sup> Rafael C. Asth, *Leis de Kepler: Entenda Quais São*; <https://www.todamateria.com.br/leis-de-kepler/>

<sup>4</sup> Richard Montgomery, “The Three-Body Problem”, *Scientific American* (Agosto de 2019); <https://www.scientificamerican.com/article/the-three-body-problem/>

“Como em tantos dos seus artigos, ele deu liberdade à sua imaginação e à sua extraordinária intuição, a qual raramente o enganava; em quase todas as secções há alguma ideia nova. Mas não vale a pena procurar definições e é frequentemente necessário adivinhar o que é que ele tem em mente interpretando o contexto. Para muitos enunciados, pura e simplesmente não forneceu qualquer demonstração e é difícil encontrar um argumento que não levante dúvidas.”

De facto, o texto que foi finalmente publicado, após um elevado número de correções, era muito diferente daquele ao qual fora atribuído o prémio. Além disso, o número da *Acta Mathematica* que continha a versão original do artigo já tinha sido impresso. Foi necessário fazer uma reimpressão, que foi cobrada a Poincaré (e cujo valor excedeu o prémio monetário que lhe fora atribuído).

E qual foi a contribuição de Poincaré? Ele mostrou que um determinado método que potencialmente poderia resolver o problema dos três corpos não funcionava. Além disso, mostrou que aquele problema é caótico, ou seja, que alterações minúsculas às condições iniciais levam rapidamente a soluções radicalmente distintas. Isto além de ter desenvolvido métodos qualitativos para estudar o problema, ou seja, métodos que não dependem de termos uma expressão analítica para descrever as soluções. Poincaré acabaria por desenvolver bastante estas ideias numa obra publicada em três volumes com o título *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*.

Entretanto, surgiu a Teoria da Relatividade Geral, que tornou estes problemas ainda mais complexos. De facto, no âmbito daquela teoria nem mesmo o problema dos dois corpos tem uma solução simples e fácil de descrever. Em particular, *não* é verdade que, num sistema solar com um único planeta, a órbita desse planeta seja uma elipse, mas está tanto mais próxima de ser elíptica quanto mais distante o planeta estiver da estrela em torno da qual está a orbitar. É por isso que este fenómeno começou por ser detetado relativamente à órbita de Mercúrio: não é elíptica e nem mesmo a influência dos restantes planetas do Sistema Solar explica isso no quadro da teoria da gravitação de Newton.

O problema dos três corpos continua a ser estudado no presente. Por exemplo, em 2000, os matemáticos Alain Chenciner e Richard Montgomery (veja-se [4])

descobriram uma solução do problema dos três corpos na qual todos têm a mesma massa e se movem ao longo de uma figura em forma de oito (o nome técnico desta figura é lemniscata de Bernoulli). Uma tal configuração nunca foi observada na Natureza. Talvez um dia isso venha a acontecer.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] June Barrow-Green, *Poincaré and the Three Body Problem*, American Mathematical Society, 1997.
- [2] Liu Cixin, *The Three-Body Problem*, Head of Zeus, 2014.
- [3] Florin Diacu, “The Solution of the  $n$ -Body Problem”, *The Mathematical Intelligencer* **18** (3), 1996.
- [4] Richard Montgomery, “A New Solution to the Three-Body Problem”, *Notices of the American Mathematical Society* **48**(5), 2001.
- [5] Richard Westfall, *Never at Rest: A Biography of Isaac Newton*, Cambridge University Press, 1980.