O FASCINANTE MUNDO DA UNIFORME E DAS SUAS PARENTES

Maria de Fátima Brilhante[a, b], Maria Ivette Gomes[b, c, d, e], Sandra Mendonça[b, f] e Dinis Pestana[b, c, e]

Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade dos Açores[a], Centro de Estatística e Aplicações (CEAUL)[b], DEIO, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (FCUL)[c], Academia das Ciências de Lisboa[d], Instituto de Investigação Científica Bento da Rocha Cabral[e] e DM-FCEE, Universidade da Madeira[f]

maria.fa.brilhante@uac.pt[a]

Devido ao teorema da transformação uniformizante, a variável aleatória Uniforme tem grande protagonismo em Estatística. Depois da apresentação sumária de variáveis aleatórias que são funções de variáveis independentes com distribuição Uniforme padrão, nomeadamente Gamas, Betas e BetaBoops, ilustramos o seu papel na construção de novos modelos, por aleatorização de parâmetros ou resultando da contração por multiplicação, ou da expansão por divisão ou exponenciação.

1. INTRODUÇÃO

A avaliação do que é mais provável ajuda-nos a tomar decisões, por exemplo, no contexto de seleção de estratégias ou de apostas. Por outro lado, os valores de probabilidade muito baixa de caudas extremas são usados para eventualmente falsear hipóteses. Nesta perspetiva, as variáveis aleatórias Uniformes podem parecer quase inúteis, porque a equiprobabilidade não apoia tomadas de decisão e, numa visão ingénua, o modelo Uniforme parece ser apenas um exemplo que permite exemplificar de forma simples o cálculo da função de distribuição e de momentos.

Mas a simplicidade do modelo Uniforme padrão (isto é, com localização 0 e dispersão 1), que denotamos $U \frown \mathit{Uniforme}(0,1)$, e que tem função densidade de probabilidade $f_U(x) = \mathbb{I}_{[0,1]}(x)$, dá-lhe o estatuto privilegiado de poder ser usado para obter números aleatórios de um modelo $X \frown F_X$ usando a função de distribuição inversa generalizada: $F_X^{\leftarrow}(U) \frown F_X$, em que $F_X^{\leftarrow}(u) = \inf\{x\colon F_X(x) \geq u\}$, sendo F_X a função de distribuição da variável aleatória X. Este resultado inverso do teorema da transformação uniformizante, $F_X(X) = U \frown \mathit{Uniforme}(0,1)$, que permitiu o desenvolvimento explosivo da Estatística Computacional e dos Métodos de Monte Carlo, é apresentado na Secção 2, onde a equiprobabilidade é também discutida.

Na Secção 3 são referidas funções de variáveis aleatórias Uniformes independentes, observando-se que as suas funções densidade de probabilidade apresentam frequentemente potências de x, $1-x$ e $-\ln x$. Este facto motiva-nos a apresentar as funções Gama e Beta de Euler, bem como a extensão não trivial BetaBoop da função Beta, que simplificam a definição de famílias importantes de variáveis aleatórias.

Na Secção 4 exploramos sumariamente o papel de variáveis *Gama, Beta e BetaBoop* na aleatorização de parâmetros em modelos hierárquicos e na contração por multiplicação, ou na expansão por divisão ou exponenciação.

2. EQUIPROBABILIDADE E O MODELO UNIFORME

A experiência aleatória que consiste no lançamento de uma moeda equilibrada uma única vez tem dois resultados possíveis correspondentes à saída de face e à de coroa, que representamos por F e C, respetivamente. A esta experiência aleatória podemos associar a variável aleatória $\mathit{Bernoulli}(\frac{1}{2})$, $B:\ \{C,F\} \longrightarrow \{0,1\}$ usando a notação

$$B = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right. ,$$

que modela equiprobabilidade dicotómica.

Da repetição sucessiva desta experiência aleatória resulta a sequência infinita $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas $B_k \frown \mathit{Bernoulli}(\frac{1}{2})$, a qual pode ser usada para representar a expansão binária de números em $[0,1]$,

$$U = 0.B_1B_2B_3\cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{2^k},$$

que curiosamente mostra que a variável aleatória contínua $U \frown \mathit{Uniforme}(0,1)$ é a soma de infinitas variáveis aleatórias discretas $\frac{B_k}{2^k}$. Borel (1909) usou este contexto[1]

[1] Obviamente $\omega = \sum_{k=1}^{j} \frac{B_k}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{2^k}$ em que $B_j = 1$ mas $B_{j+1} = B_{j+2} = \cdots = 0$, admite também a expansão de Bernoulli infinita $\omega = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k^*}{2^k} = \sum_{k=1}^{j} \frac{B_k}{2^k}$ em que $B_k^* \equiv B_k$, $k = 1, \ldots, j-1$, $B_j^* = 0$, $B_{j+1}^* = B_{j+2}^* = \cdots = 1$, pois $\sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{B_k^*}{2^k} = \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{j+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{j+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^j} = \frac{B_j}{2^j}$. Por isso descartamos as expansões "degeneradas", *i.e.* finitas, que constituem um conjunto com medida de Lebesgue 0, a fim de ter uma relação bijetiva entre o conjunto $\mathcal{B}$ de expansões de Bernoulli infinitas e $\{x:\ x \in (0,1]\}$.

para enunciar o princípio de Borel, que foi uma construção pioneira e rigorosa de probabilidade contínua[2]:

Princípio de Borel: Seja $\mathcal{B}$ o conjunto das sequências de Bernoulli observáveis no lançamento de uma moeda equilibrada. Denote-se E um acontecimento que pode ocorrer numa de tais sequências e $\mathcal{B}_E$ o subconjunto de $\mathcal{B}$ que corresponde ao acontecimento E. A probabilidade de E é $\lambda\{\mathcal{B}_E\}$, em que λ é a medida de Lebesgue.

Uma vez que a medida de Lebesgue é invariante para translações, tem-se $\mathbb{P}[x < U \leq x + \Delta] = \Delta$ quaisquer que sejam $\Delta \in (0,1)$ e $x \in [0, 1-\Delta)$, o que justifica dizer que a variável aleatória U é Uniforme, no sentido em que modela equiprobabilidade contínua em $[0,1]$. Assim, se $x \in [0,1]$, então $\mathbb{P}[0 < U \leq x] = x$, implicando que a função de distribuição de U é $F_U(x) = x\,\mathbb{I}_{[0,1)}(x) + \mathbb{I}_{[1,\infty)}(x)$ e, portanto,

$$U \frown \mathit{Uniforme}(0,1) \Longleftrightarrow f_U(x) = \mathbb{I}_{[0,1]}(x),$$

em que f_U é a função densidade de probabilidade da variável aleatória U.

É imediato que se $U \frown \mathit{Uniforme}\,(0,1)$, $1 - U \frown \mathit{Uniforme}(0,1)$. De facto, isto é o caso especial $\mu = 1$ e $\theta = -1$ de $X = \mu + \theta\, U \frown \mathit{Uniforme}(a,b)$, $\mu, \theta \in \mathbb{R}$, com função densidade de probabilidade $f_X(x) = \frac{1}{|\theta|}\,\mathbb{I}_{[a,b]}(x)$, em que $a = \min\{\mu, \mu+\theta\}$ e $b = \max\{\mu, \mu+\theta\}$.

A propriedade mais relevante da variável aleatória $U \frown \mathit{Uniforme}(0,1)$ é o teorema da transformação uniformizante (Fisher, 1932).

Teorema (transformação uniformizante). *Seja X uma variável aleatória contínua com função de distribuição F_X. Então $F_X(X) = U \frown \mathit{Uniforme}(0,1)$.*

Demonstração. O suporte de $Y = F_X(X)$ é $[0,1]$. Denotando $F_X^{\leftarrow}(u) = \inf\{x : F_X(x) \geq u\}$ a inversa generalizada de F_X, para $y \in [0,1]$, tem-se $F_Y(y) = \mathbb{P}\big[F_X(X) \leq y\big] = \mathbb{P}\big[X \leq F_X^{\leftarrow}(y)\big] = F_X\big(F_X^{\leftarrow}(y)\big) = y$, ou seja, $f_Y(y) = \mathbb{I}_{[0,1]}(y)$. □

Exemplo 1: Seja $X \frown \mathit{Exponencial}(1)$, *i.e.* X é uma variável aleatória com função densidade de probabilidade $f_X(x) = \mathrm{e}^{-x}\,\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x)$ e função de distribuição $F_X(x) = (1 - \mathrm{e}^{-x})\;\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x)$. Então

$$1 - \mathrm{e}^{-X} \frown \mathit{Uniforme}(0,1).$$

Consequentemente, também $\mathrm{e}^{-X} \frown \mathit{Uniforme}(0,1)$.

Ao testar uma hipótese nula H_0 contra uma alternativa unilateral à direita usando uma estatística de teste T, o valor-p, $p = \mathbb{P}[T > T_{\text{obs.}} | H_0 \text{ verdadeira}]$ é uma observação de uma variável aleatória Uniforme padrão. Com toda a generalidade, a uniformidade dos valores-p é uma consequência do teorema da transformação uniformizante.

O enunciado recíproco (transformação uniformizante inversa) é a base de um método elementar para gerar amostras de números pseudoaleatórios de uma população X com função de distribuição F_X a partir de pseudoaleatórios de Uniforme padrão.

Teorema (transformação uniformizante inversa). *Seja U uma variável aleatória Uniforme em $[0,1]$. Então, $F_X^{\leftarrow}(U)$ é uma variável aleatória com função de distribuição F_X.*

Demonstração. $F_X^{\leftarrow}(u) = \inf\{x : F_X(x) \geq u\}$, pelo que $\{u : F_X^{\leftarrow}(u) \leq x\} = \{u : u \leq F_X(x)\} = F_X(x)$. □

Exemplo 2: Do Exemplo 1 conclui-se que se $U \frown \mathit{Uniforme}(0,1)$, então $-\ln U \frown \mathit{Exponencial}(1)$.

A variável aleatória $\mathit{Uniforme}(0,1)$ estabelece assim uma ponte entre duas variáveis aleatórias X e Y, no sentido em que $F_X = F_X^{\leftarrow}(F_Y)$ e $F_Y = F_Y^{\leftarrow}(F_X)$. Devido ao desenvolvimento explosivo da Estatística Computacional, a *Uniforme* passou a ser um dos modelos mais estudados, veja-se Johnson *et al.* (1995, Cap. 26).

3. FUNÇÕES DE VARIÁVEIS UNIFORMES E DE SUCESSÕES DE VARIÁVEIS UNIFORMES INDEPENDENTES E IDENTICAMENTE DISTRIBUÍDAS — VARIÁVEIS ALEATÓRIAS GAMA, BETA E BETABOOP

Além de $F_X^{\leftarrow}(U) = X \frown F_X$, que, como referimos já no Exemplo 2, mostra que $-\ln U \frown \mathit{Exponencial}(1)$, outras transformações imediatas de $U \frown \mathit{Uniforme}(0,1)$ são:

- $f_{\frac{1}{U}}(x) = \frac{1}{x^2}\,\mathbb{I}_{[1,\infty)}(x)$, e $F_{\frac{1}{U}}(x) = \big(1 - \frac{1}{x}\big)\mathbb{I}_{[1,\infty)}(x)$, ou seja, $\frac{1}{U} \frown \mathit{Pareto}(1)$.

  Recorde-se que $F_{\frac{1}{X}}(x) = \mathbb{P}\big[\frac{1}{X} \leq x\big] = \mathbb{P}\big[\frac{1}{x} \leq X\big] = 1 - F_X\big(\frac{1}{x}\big)$ pelo que $f_{\frac{1}{X}}(x) = \frac{1}{x^2} f_X\Big(\frac{1}{x}\Big)$.

- $f_{U^{1/p}}(x) = p\,x^{p-1}\,\mathbb{I}_{(0,1)}(x)$, $p > 0$. Observe-se que $-\ln U^{1/p} \frown \mathit{Exponencial}\big(\frac{1}{p}\big)$.

  De $F_{U^{1/p}}(x) = \mathbb{P}[U \leq x^p] = x^p$ no intervalo $(0,1]$, tem-se $f_{U^{1/p}}(x) = p\,x^{p-1}\,\mathbb{I}_{(0,1)}(x)$; e, para $x > 0$, de se ter

$F_{-\ln U^{1/p}}(x) = \mathbb{P}[-\ln U^{1/p} \le x] = \mathbb{P}[U \ge \mathrm{e}^{-px}] = 1 - \mathrm{e}^{-px}$,

resulta $f_{-\ln U^{1/p}}(x) = p\,\mathrm{e}^{-px}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)$.

- $f_{1-U^{1/q}}(x) = q\,(1-x)^{q-1}\,\mathbb{I}_{(0,1)}(x)$, $q > 0$. Observe-se que $\mathcal{K}_{\xi,q} = (1-U^{1/q})^{1/\xi}$ é a variável aleatória de Kumaraswamy (1980) com parâmetros positivos ξ e q, usada, por exemplo, na modelação da percentagem da quantidade de água em reservatórios, cuja função de distribuição é

$$F_{\mathcal{K}_{\xi,q}}(x) = [1-(1-x^{\xi})^{q}]\,\mathbb{I}_{[0,1)}(x) + \mathbb{I}_{[1,\infty)}(x)$$

e cuja função densidade de probabilidade é

$$f_{\mathcal{K}_{\xi,q}}(x) = \xi\,q\,x^{\xi-1}\,(1-x^{\xi})^{q-1}\,\mathbb{I}_{(0,1)}(x).$$

Por outro lado, é fácil calcular a função densidade de probabilidade de somas, de produtos e de estatísticas ordinais de $(U_1,\ldots,U_n)$, em que $U_k \frown \mathit{Uniforme}(0,1)$, $k = 1,\ldots,n$, são independentes.

Somas: Partindo da função densidade de probabilidade da soma de duas variáveis independentes com distribuição Uniforme padrão

$$\begin{aligned} f_{U_1+U_2}(z) &= \int f_{U_1}(y) f_{U_2}(z-y)\,\mathrm{d}y = \\ &= \int_{z-1}^{z} \mathbb{I}_{[0,1]}(y)\,\mathrm{d}y = \\ &= \begin{cases} 0\,, & z<0 \vee z>2 \\ \int_{\max\{0,z-1\}}^{\min\{z,1\}} \mathrm{d}y\,, & 0 \le z \le 2 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 0, & z<0 \vee z \ge 2 \\ z, & 0 \le z < 1 \\ 2-z, & 1 \le z < 2 \end{cases}, \end{aligned}$$

e analogamente, para a soma de n variáveis independentes, $U_1,\ldots,U_n$, com distribuição Uniforme padrão, tem-se

$$\begin{aligned} f_{\sum_{k=1}^{n} U_k}(z) &= \int f_{\sum_{k=1}^{n-1} U_k}(y)\, f_{U_n}(z-y)\,\mathrm{d}y = \\ &= \int_{z-1}^{z} f_{\sum_{k=1}^{n-1} U_k}(y)\,\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

obtendo-se, após alguns cálculos,

$$f_{\sum_{k=1}^{n} U_k}(z) =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\left[\sum_{k=0}^{\lfloor z \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} (\max\{0, z-k\})^{n-1}\right] \mathbb{I}_{[0,n]}(z),$$

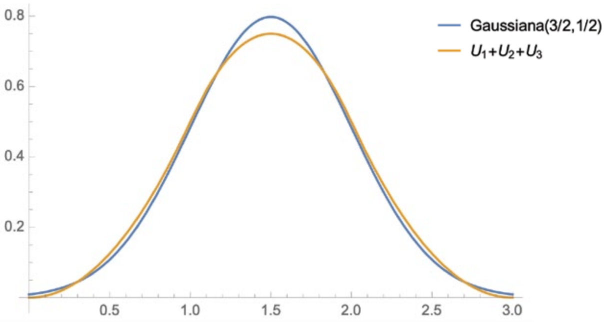


Figura 1. Funções densidade de probabilidade de $\sum_{k=1}^{3} U_k$ e da Gaussiana com os mesmos valor médio e desvio padrão.

onde $\lfloor z \rfloor$ é o maior inteiro não superior a z.

Intragável? Sim, mas felizmente a aproximação (teorema limite central) $\sum_{k=1}^{n} U_k \approx X \frown \mathit{Gaussiana}\left(\frac{n}{2}, \sqrt{\frac{n}{12}}\right)$ é muito boa, mesmo para valores bastante moderados de n, como se ilustra na figura 1.

A função densidade de probabilidade da média aritmética $\overline{U}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U_k$ é então

$$f_{\overline{U}_n}(x) = \frac{n}{(n-1)!}$$

$$\left[\sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} (\max\{0, nx-k\})^{n-1}\right] \mathbb{I}_{[0,1]}(x).$$

Produtos: Partindo da função densidade de probabilidade do produto de duas variáveis independentes com distri-

[2] O paradoxo de Bertrand (1889, pp. 5-6.), determinando valores diferentes para a probabilidade de uma corda "ao acaso" ter maior comprimento do que o raio de uma circunferência, mostrou os limites do recurso à intuição na Teoria da Probabilidade, e foi decerto uma das motivações de Hilbert para, na sua alocução no Congresso Mundial de Matemática de 1900, indicar que um dos principais problemas em aberto em Matemática seria proceder a uma construção axiomática rigorosa da Probabilidade (6.º problema de uma lista de 23; no Congresso de Paris apenas apresentou dez problemas, incluindo o da fundamentação rigorosa da Probabilidade). O problema apenas foi resolvido em 1933 por Kolmogorov (1933). Anote-se que Diogo Pacheco d'Amorim, na sua tese de doutoramento (Pacheco d'Amorim, 1914, republicada em Mendonça *et al.*, 2007), tentou fazer uma construção rigorosa da Probabilidade com base no conceito de lançamento ao acaso, aparentemente sem conhecer o trabalho de Borel. Como já era sabido do paradoxo de Bertrand, este ponto de partida que lhe parece intuitivo e inquestionável leva-o a estabelecer resultados absurdos, como, por exemplo, que deixando cair uma corda ao acaso num plano, a distância entre os extremos da corda é 0, sem se aperceber de que a sua construção de probabilidade contínua, dobrando repetidamente um segmento, acaba num único ponto. Veja-se como o problema deveria ser abordado com renormalização em Santos (2008).

buição Uniforme padrão,

$$f_{U_1U_2}(z) = \int f_{U_1}(y) f_{U_2}\left(\tfrac{z}{y}\right) \frac{\mathrm{d}y}{|y|} =$$
$$= \int_z^1 \frac{\mathrm{d}y}{y}\, \mathbb{I}_{(0,1]}(z) =$$
$$= -\ln z\, \mathbb{I}_{(0,1]}(z),$$

e analogamente, para o produto de n variáveis independentes, $U_1, \ldots, U_n$, com distribuição Uniforme padrão, tem-se

$$f_{\prod_{k=1}^{n} U_k}(z) = \int f_{\prod_{k=1}^{n-1} U_k}(y)\, f_{U_n}\left(\tfrac{z}{y}\right) \frac{\mathrm{d}y}{|y|} =$$
$$= \int_z^1 f_{\prod_{k=1}^{n-1} U_k}(y)\, \frac{\mathrm{d}y}{y}\, \mathbb{I}_{(0,1]}(z)\,;$$

consequentemente,

$$f_{\prod_{k=1}^{n} U_k}(z) = \frac{(-\ln z)^{n-1}}{(n-1)!}\, \mathbb{I}_{(0,1]}(z)\,.$$

Assim, a função densidade de probabilidade da média geométrica $\mathcal{G}_n = \left(\prod_{k=1}^{n} U_k\right)^{1/n}$ de variáveis independentes com distribuição Uniforme padrão é

$$f_{\mathcal{G}_n}(x) = \frac{n^n}{(n-1)!}\, x^{n-1}\, (-\ln x)^{n-1}\, \mathbb{I}_{(0,1]}(x).$$

É interessante anotar que se definirmos o modelo hierárquico $\mathfrak{U} \frown Uniforme(0, U)$, obtém-se $f_{\mathfrak{U}}(x) = \int_x^1 \frac{\mathrm{d}y}{y}\, \mathbb{I}_{(0,1]}(x) = -\ln x\, \mathbb{I}_{(0,1]}(x)$ e, portanto, $\mathfrak{U} \overset{\mathrm{d}}{=} U_1U_2$, com $U_1 \overset{\mathrm{d}}{=} U_2 \frown Uniforme(0,1)$ independentes. Mais geralmente, definindo recursivamente $\mathfrak{U}_0 \frown Uniforme(0,1)$, $\mathfrak{U}_k \frown Uniforme\,(0, \mathfrak{U}_{k-1})$, $k = 1, \ldots, n$, obtém-se $f_{\mathfrak{U}_n}(x) = \frac{(-\ln x)^{n-1}}{(n-1)!} \mathbb{I}_{(0,1]}(x)$, ou seja, temos o produto de n variáveis independentes com distribuição Uniforme padrão, i.e. $\mathfrak{U}_n \overset{\mathrm{d}}{=} \prod_{k=1}^{n} U_k$.

Divisão: A função densidade de probabilidade da divisão ("*Slash*") de variáveis $U_1 \overset{\mathrm{d}}{=} U_2 \frown Uniforme(0,1)$ independentes é

$$f_{\frac{U_1}{U_2}}(z) = \int f_{U_1}(zy)\, f_{U_2}(y)\, |y|\, \mathrm{d}y =$$
$$= \begin{cases} 0\,, & z < 0 \\ \int_0^{\min\left\{1, \frac{1}{z}\right\}} y\, \mathrm{d}y\,, & z \geq 0 \end{cases} =$$
$$= \begin{cases} 0, & z < 0 \\ 1/2, & 0 \leq z < 1 \\ 1/(2z^2), & z \geq 1 \end{cases}.$$

Exponenciação: Seja $W = U_1^{U_2}$; então $-\ln W = U_2(-\ln U_1)$ tem função densidade de probabilidade

$$f_{-\ln W}(w) = \int f_{U_2}\left(\tfrac{w}{y}\right) f_{-\ln U_1}(y)\, \frac{\mathrm{d}y}{|y|} =$$
$$= \int_w^\infty \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}\, \mathrm{d}y\, \mathbb{I}_{(0,\infty)}(w) =$$
$$= \mathrm{E}_1(w)\, \mathbb{I}_{(0,\infty)}(w),$$

onde $\mathrm{E}_1(x) = \int_x^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t$ é a função integral exponencial (Abramowitz and Stegun, 1972, Cap. 5, p. 228). Consequentemente, a função densidade de probabilidade de $W = U_1^{U_2}$ é, para $w \in (0,1)$,

$$f_W(w) = f_{-\ln W}(-\ln w)\, \frac{1}{|w|} =$$
$$= \frac{\mathrm{E}_1(-\ln w)}{w} =$$
$$= -\frac{\mathrm{li}(w)}{w}\,,$$

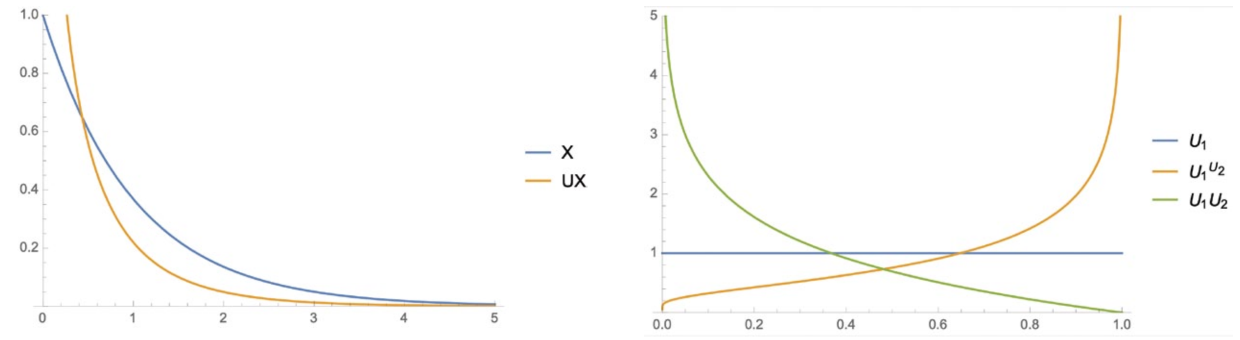
onde $\mathrm{li}(x) = \fint_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$, $x > 0$, é a função integral logarítmica.

Na figura 2 as funções densidade de probabilidade de $XU \overset{\mathrm{d}}{=} -\ln W$ em (a) e U_1U_2 em (b) ilustram a contração quando se multiplica por uma variável com suporte $[0,1]$, e a função densidade de probabilidade de $W = U_1^{U_2}$ exibe a expansão ao usar um expoente com suporte $[0,1]$.

Estatísticas Ordinais: Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ um vetor aleatório de n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com uma variável aleatória X e $(X_{1:n}, \ldots, X_{n:n})$ o correspondente vetor de estatísticas ordinais ascendentes. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, o acontecimento $x < X_{i:n} \leq x + \mathrm{d}x$, com $\mathrm{d}x \approx 0$, ocorre se e só se $i-1$ das n variáveis forem inferiores ou iguais a x, uma das outras $n-(i-1)$ estiver entre x e $x+\mathrm{d}x$ e as restantes $n-i$ variáveis forem superiores a $x+\mathrm{d}x$. Portanto,

$$\mathbb{P}[x < X_{i:n} \leq x + \mathrm{d}x] =$$
$$= \binom{n}{i-1} (\mathbb{P}[X \leq x])^{i-1} \binom{n-i+1}{1}$$
$$\mathbb{P}[x < X \leq x + \mathrm{d}x]\, (\mathbb{P}[X > x + \mathrm{d}x])^{n-i}$$
$$= \frac{n!}{(i-1)!\,(n-i)!}\, F_X^{i-1}(x) [F_X(x+\mathrm{d}x)$$
$$- F_X(x)][1 - F_X(x+\mathrm{d}x)]^{n-i}.$$

Dividindo por $\mathrm{d}x$ e fazendo $\mathrm{d}x \to 0^+$, obtém-se a função



a) $X \frown Exponencial(1)$, $U \frown Uniforme(0,1)$, independentes.
$XU \prec X$

b) $U_1, U_2 \frown Uniforme(0,1)$, independentes.
$U_1 U_2 \prec U_1 \prec U_1^{U_2}$.

Figura 2. Contração (respetivamente expansão) ao multiplicar (respetivamente exponenciar) por $Uniforme(0,1)$.
(Note-se que $XY \prec X$ se e só se $F_{XY}(x) \geq F_X(x)$, com desigualdade estrita para alguns valores x.)

densidade de probabilidade pretendida:

$$
\begin{aligned}
f_{X_{i:n}}(x) &= \lim_{\mathrm{d}x \to 0} \frac{\mathbb{P}[x < X_{i:n} \leq x + \mathrm{d}x]}{\mathrm{d}x} \\
&= \frac{n!}{(i-1)!\,(n-i)!}\, F_X^{i-1}(x) \\
&\qquad \lim_{\mathrm{d}x \to 0} \frac{F_X(x+\mathrm{d}x) - F_X(x)}{\mathrm{d}x}\, [1 - F_X(x+\mathrm{d}x)]^{n-i} \\
&= \frac{n!}{(i-1)!\,(n-i)!}\, [F_X(x)]^{i-1}\, [1 - F_X(x)]^{n-i}\, f_X(x).
\end{aligned}
$$

No caso de a população parente ser Uniforme padrão, tem-se $F_U(x) = x\,\mathbb{I}_{[0,1)}(x) + \mathbb{I}_{[1,\infty)}(x)$ e, portanto,

$$
f_{U_{k:n}}(x) = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\, x^{k-1}(1-x)^{n-k}\,\mathbb{I}_{[0,1]}(x).
$$

Em particular, no que se refere ao mínimo e ao máximo,

$$
f_{U_{1:n}}(x) = n(1-x)^{n-1}\,\mathbb{I}_{[0,1]}(x)
$$

e $f_{U_{n:n}}(x) = n\,x^{n-1}\,\mathbb{I}_{[0,1]}(x)$.

Nas funções densidade de probabilidade acima aparecem potências de x, $1-x$, $-\ln x$, pelo que podemos simplificar substancialmente as notações com as funções Gama e Beta de Euler e ainda com a função BetaBoop, a definir adiante, que generaliza a Beta. Para mais informação sobre as funções Gama e Beta consulte-se Whittaker and Watson (2013, Cap. XII), Erdélyi *et al.* (1953, Cap. 1) e Abramowitz and Stegun (1972, Cap. 6).

Função Gama e variáveis aleatórias Gama

A função Gama, ou integral de Euler de segunda espécie,

$$
\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\,,
$$

toma valores finitos para qualquer $\alpha > 0$.

No que se refere a valores interessantes da função Gama, começamos por recordar a expressão iterativa que se obtém integrando por partes:

$$
\begin{aligned}
\Gamma(\alpha) &= \left(\frac{x^\alpha}{\alpha}\,\mathrm{e}^{-x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{x^\alpha}{\alpha}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} \Longleftrightarrow \Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha),
\end{aligned}
$$

e como $\Gamma(1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$, conclui-se que $\Gamma(n+1) = n!$, $n \in \mathbb{N}$.

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\left[\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\right]^2 &= \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \int_0^\infty y^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y \\
&\underset{\substack{x=u^2\\ y=v^2}}{=} 4\int_0^\infty \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(u^2+v^2)}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&\underset{\substack{u=\rho\cos\theta\\ v=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta}}{=} 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^\infty \rho\,\mathrm{e}^{-\rho^2}\mathrm{d}\rho = \pi,
\end{aligned}
$$

donde $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ e, para $n \geq 1, \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\left(n-\frac{5}{2}\right)\cdots\frac{5}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!}{2^{2n-1}(n-1)!}\sqrt{\pi}$.

Como $\Gamma(\alpha) > 0$ para $\alpha > 0$, observa-se de imediato que $f_{X_\alpha}(x) = \frac{x^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{-x}}{\Gamma(\alpha)}\,\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x)$, $\alpha > 0$, é uma função densidade de probabilidade. Usamos a notação $X_\alpha \frown Gama(\alpha)$.

Mais geralmente, dizemos que

$$Y = \lambda + \delta X_\alpha \frown Gama(\alpha, \delta, \lambda),\ \alpha, \delta > 0,\ \lambda \in \mathbb{R},$$

se Y é uma variável aleatória com função densidade de probabilidade $f_Y(x) = \frac{(x-\lambda)^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-(x-\lambda)/\delta}}{\delta^\alpha\,\Gamma(\alpha)}\,\mathbb{I}_{[\lambda,\infty)}(x)$. No caso mais comum de a localização ser $\lambda = 0$ escrevemos indicando simplesmente o parâmetro de forma α e o parâmetro de dispersão (escala) δ: $Y \frown Gama(\alpha, \delta)$, sendo especialmente importante o caso $Y \frown Gama(1, \delta)$, que corresponde à variável exponencial com escala δ. Em geral escreve-se $Y \frown Exponencial(\delta)$.

Se $Z \frown Gaussiana(0, 1)$, então Z^2 tem função densidade de probabilidade

$$f_{Z^2}(x) = f_Z(\sqrt{x})(\sqrt{x})' - f_Z(-\sqrt{x})(-\sqrt{x})' = \frac{x^{-1/2}\mathrm{e}^{-x/2}}{2^{1/2}\,\Gamma(1/2)}\,\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x),$$

ou seja $Z^2 \frown Gama\left(\frac{1}{2}, 2\right)$. Quando Pearson (1900) inventou o teste do qui-quadrado, usava a notação χ para a Gaussiana padrão, e por isso chamou ao seu quadrado, naturalmente, χ^2. Devido às propriedades aditivas das variáveis Gama – se $X \frown Gama(\alpha, \delta)$ e $Y \frown Gama(\beta, \delta)$ são independentes, então $X + Y \frown Gama(\alpha + \beta, \delta)$ – conclui-se que a soma $Y = \sum_{k=1}^n Z_k^2$ dos quadrados de n variáveis $Z_k \frown Gaussiana(0, 1)$ independentes é uma $Gama(\frac{n}{2}, 2)$, que desde esse trabalho pioneiro de Pearson é usualmente denominada qui-quadrado com n graus de liberdade, usando-se a notação $Z_1^2 + \cdots + Z_n^2 \frown \chi_n^2$. Observe-se que se $X \frown Exponencial(1)$, então $2X \frown \chi_2^2$.

Função Beta e variáveis aleatórias Beta

A função Beta, ou integral de Euler de primeira espécie,

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x\,,$$

toma valores finitos para quaisquer $p, q > 0$. Consequentemente,

$$f_{X_{p,q}}(x) = \frac{x^{p-1}\,(1-x)^{q-1}}{B(p,q)}\,\mathbb{I}_{(0,1)}(x), \quad p, q > 0,$$

é uma função densidade de probabilidade, e dizemos que $X_{p,q} \frown Beta(p, q)$. Observe-se que $X_{1,1} \frown Uniforme(0, 1)$, pelo que a distribuição *Beta* (1,1) coincide com a Uniforme padrão.

A função Beta pode exprimir-se de forma simples em termos da função Gama:

$$\begin{aligned}
\Gamma(p)\,\Gamma(q) &= \int_0^\infty x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \int_0^\infty y^{q-1}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y \\
&\underset{\substack{x+y=z \\ y=t}}{=} \int_0^\infty \int_0^z (z-t)^{p-1}t^{q-1}\mathrm{e}^{-z}\mathrm{d}t\,\mathrm{d}z \\
&\underset{t=zw}{=} \int_0^\infty z^{p+q-1}\mathrm{e}^{-z}\,\mathrm{d}z \int_0^1 (1-w)^{p-1}w^{q-1}\mathrm{d}w \\
&= \Gamma(p+q)\,B(q, p),
\end{aligned}$$

ou seja, $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = B(q, p)$. Por exemplo, $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \pi$.

Função BetaBoop e variáveis aleatórias BetaBoop

Seja

$$G_{p,q,P,Q}(x) = x^{p-1}(1-x)^{q-1}\left[-\ln(1-x)\right]^{P-1}(-\ln x)^{Q-1},$$

$x \in (0, 1)$, $p, q, P, Q > 0$, e defina-se a função BetaBoop

$$\beta(p, q, P, Q) = \int_0^1 G_{p,q,P,Q}(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Observe-se que $\beta(p, q, 1, 1) = B(p, q)$ e que $G_{p,q,P,Q}(x) = G_{q,p,Q,P}(1-x)$, donde $\beta(p, q, P, Q) = \beta(q, p, Q, P)$. Por outro lado, recorrendo a integração por substituição de variável, verifica-se que $\beta(p, 1, 1, Q) = \frac{\Gamma(Q)}{p^Q}$, donde se conclui que $\beta(1, q, P, 1) = \beta(q, 1, 1, P) = \frac{\Gamma(P)}{q^P}$. Por exemplo,

$$\beta\left(p, 1, 1, \tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{p}}.$$

Uma condição suficiente para $\beta(p, q, P, Q) < \infty$ é $\min\{p, q\} + \min\{P, Q\} > 1$ (Brilhante *et al.*, 2023). Observe-se, porém, que não é condição necessária, pois, para quaisquer $p, Q > 0$, tem-se

$$\int_0^1 x^{p-1}\,(-\ln x)^{Q-1}\,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(Q)}{p^Q}$$

e, para quaisquer $q, P > 0$, tem-se

$$\int_0^1 (1-x)^{q-1}\left[-\ln(1-x)\right]^{P-1}\,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(P)}{q^P}.$$

Caso $\beta(p, q, P, Q) < \infty$,

$$f_{p,q,P,Q}(x) = \frac{G_{p,q,P,Q}(x)}{\beta(p, q, P, Q)} =$$

$$= \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}\left[-\ln(1-x)\right]^{P-1}(-\ln x)^{Q-1}}{\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\left[-\ln(1-x)\right]^{P-1}(-\ln x)^{Q-1}\,\mathrm{d}x}\,\mathbb{I}_{(0,1)}(x) \tag{2}$$

é uma função densidade de probabilidade, denotando-se $X_{p,q,P,Q} \frown BetaBoop(p,q,P,Q)$ a correspondente variável aleatória. Naturalmente, em vez de $X_{p,q,1,1} \frown BetaBoop(p,q,1,1)$, usamos $X_{p,q} \frown Beta(p,q)$.

Retomamos os exemplos de funções de variáveis uniformes com notação mais condensada usando as funções Gama, Beta e BetaBoop, começando por registar a relação de subordinação estocástica entre algumas das variáveis BetaBoop que são funções de $(U_1,\ldots,U_n)$, com indicação das respetivas funções densidade de probabilidade no suporte $[0,1]$:

$$\underbrace{\overset{BetaBoop(1,1,1,n)}{\prod_{k=1}^{n} U_k}}_{\frac{(-\ln x)^{n-1}}{\Gamma(n)}} \prec \underbrace{\overset{Beta(1,n)}{U_{1:n}}}_{n(1-x)^{n-1}} \prec \underbrace{\overset{Beta(k,n+1-k)}{U_{k:n}}}_{\frac{x^{k-1}(1-x)^{n-k}}{B(k,n+1-k)}} \prec \underbrace{\overset{Beta(n,1)}{U_{n:n}}}_{nx^{n-1}} \prec$$

$$\prec \underbrace{\overset{BetaBoop(1,1,n,1)}{1-\prod_{k=1}^{n}(1-U_k)}}_{\frac{[-\ln(1-x)]^{n-1}}{\Gamma(n)}}.$$

1. $f_{U^{1/p}}(x) = p\,x^{p-1}\,\mathbb{I}_{(0,1)}(x)$ e, assim, $U^{1/p} \stackrel{d}{=} X_{p,1} \frown Beta(p,1)$; para $n \in \mathbb{N}$, tem-se $U^{1/n} \stackrel{d}{=} U_{n:n}$.

2. $1-U^{1/q} \frown Beta(1,q)$; para $n \in \mathbb{N}$, tem-se $1-U^{1/n} \stackrel{d}{=} U_{1:n}$.

3. $U_{k:n} \stackrel{d}{=} X_{k,n+1-k} \frown Beta(k,n+1-k)$, em que k e $n+1-k$ são os *ranks* ascendente e descendente, respetivamente. Observe-se que $X_{k:n} \stackrel{d}{=} U_{k:n+k-1}$.

4. $-\ln U^{1/p} \frown Exponencial\left(\frac{1}{p}\right)$; em particular, $-\ln U_{n\cdot n} \stackrel{d}{=} -\ln U^{1/n} \frown Exponencial\left(\frac{1}{n}\right)$.

5. $Y_{Q,p} = -\ln X_{p,1,1,Q} \frown Gama\left(Q,\frac{1}{p}\right)$:
 Para $x \in [0,\infty)$, $\mathbb{P}[-\ln X_{p,1,1,Q} \le x] = 1-\mathbb{P}[X_{p,1,1,Q} \le \mathrm{e}^{-x}] = 1-F_{p,1,1,Q}(\mathrm{e}^{-x})$. Consequentemente a função densidade de probabilidade de $-\ln X_{p,1,1,Q}$ é
 $$f_{-\ln X_{p,1,1,Q}}(x) = \frac{p^Q}{\Gamma(Q)}\,(\mathrm{e}^{-x})^{p-1}\,\left(-\ln(\mathrm{e}^{-x})\right)^{Q-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x) = \frac{p^Q\,x^{Q-1}\,\mathrm{e}^{-px}}{\Gamma(Q)}\,\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x).$$
 Portanto $-\ln X_{p,1,1,Q} \frown Gama\left(Q,\frac{1}{p}\right)$; em particular, $-\ln X_{p,1} \frown Exponencial\left(\frac{1}{p}\right)$ e $-\ln U \frown Exponencial(1)$.

 Observe-se que se $Q = N \in \mathbb{N}$, então
 $$Y_{N,p} \stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^{N} Y_{1,p;k}$$
 onde $Y_{1,p;k} \frown Exponencial\left(\frac{1}{p}\right)$, $k=1,\ldots,N$, são variáveis aleatórias independentes. Portanto
 $$\mathrm{e}^{-Y_{N,p}} \stackrel{d}{=} \prod_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{-Y_{1,p;k}}$$
 reobtendo-se assim
 $$X_{p,1,1,N} = \prod_{k-1}^{N} U_k \frown BetaBoop(1,1,1,N)\,,$$
 com a consequência imediata
 $$X_{p,1,1,Q}^{1/\xi} \stackrel{d}{=} X_{p\xi,1,1,Q},\ \xi > 0.$$

6. Mais geralmente,
 $$\prod_{k=1}^{N} U_k^{1/p} \frown BetaBoop(p,1,1,N).$$
 Assim, como já foi referido, a média geométrica $\mathcal{G}_n = \left(\prod_{k=1}^{n} U_k\right)^{1/n} \stackrel{d}{=} X_{n,1,1,n}$ tem função densidade de probabilidade
 $$f_{\mathcal{G}_n}(x) = \frac{n^n}{\Gamma(n)}\,x^{n-1}(-\ln x)^{n-1}\,\mathbb{I}_{(0,1]}(x)$$
 e função de distribuição
 $$\mathrm{F}_{\mathcal{G}_n}(x) = \frac{\Gamma(n,-n\ln x)}{\Gamma(n)}\,\mathbb{I}_{(0,1)}(x) + 1\,\mathbb{I}_{[1,\infty)}(x),$$
 onde $\Gamma(n,z) = \int_z^\infty x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ é a função gama incompleta superior.

7. $\frac{1}{U_{k:k}} \stackrel{d}{=} T_k \frown Pareto(k)$.

8. $\mathcal{K}_{\xi;\alpha} = X_{1,\alpha,1,1}^{1/\xi}$ é a variável aleatória de Kumaraswamy com parâmetros positivos ξ e α.
 A variável aleatória de Kumaraswamy generalizada $\mathcal{K}_{\xi;p,q,P,Q} = X_{p,q,P,Q}^{1/\xi}$, com $p,q,P,Q,\xi > 0$, tem função densidade de probabilidade
 $$f_Y(y) = \frac{1}{\beta(p,q,P,Q)}\,\xi^Q\,y^{\xi p-1}\left(1-y^\xi\right)^{q-1}\left[-\ln\left(1-y^\xi\right)\right]^{P-1}(-\ln y)^{Q-1}\,\mathbb{I}_{(0,1)}(y).$$
 Observe-se que
 $$X_{p,1,1,Q}^{1/\xi} \stackrel{d}{=} X_{p\xi,1,1,Q} \frown BetaBoop(p\xi,1,1,Q)$$
 e que, em particular, $X_{p,1}^{1/\xi} \stackrel{d}{=} X_{p\xi,1} \frown Beta(p\xi,1)$ e $X_{1,1,1,Q}^{1/\xi} \stackrel{d}{=} X_{\xi,1,1,Q} \frown BetaBoop(\xi,1,1,Q)$.

4. ALGUMAS APLICAÇÕES DE VARIÁVEIS GAMA, BETA E BETABOOP

Referimos já o protagonismo da variável Uniforme em Estatística Computacional e Métodos de Monte Carlo. A família das variáveis Beta, devido à grande diversidade de formas das densidades $Beta(p,q)$, veja-se a figura 3, é um modelo muito versátil para dados com suporte limitado (e não cabe aqui referir a importância que tem em Estatística Bayesiana).

Quanto à família das variáveis Gama, referimos já a importância da subfamília das variáveis Qui-quadrado. No entanto, qualquer dos modelos apresentados tem outras aplicações interessantes. Nesta secção, exemplificamos sucintamente o seu uso na aleatorização de parâmetros e na contração e expansão usando variáveis com suporte [0,1], como já foi exemplificado na figura 2.

Modelos hierárquicos e aleatorização de parâmetros

Aleatorizar parâmetros é uma forma interessante de flexibilizar modelos. Nesse contexto, usa-se por exemplo a distribuição Gama para aleatorizar um parâmetro de escala, ou uma distribuição BetaBoop para aleatorizar um parâmetro de probabilidade. Adiante usamos as notações $X|\Lambda$ e $X|P$, respetivamente, para representar uma variável aleatória X cuja distribuição de probabilidade depende de outra variável aleatória, Λ, com suporte $[0,\infty)$, ou P, com suporte $[0,1]$, respetivamente.

Para ilustrar o primeiro caso, seja $X|\Lambda \frown Poisson(\Lambda)$ em que $\Lambda \frown Gama(\alpha,\delta)$. De

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X=k] &= \int_0^\infty \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\frac{\lambda^{\alpha-1}e^{-\lambda/\delta}}{\delta^\alpha\Gamma(\alpha)}d\lambda \\ &= \frac{1}{k!\delta^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty\left(\frac{\delta}{1+\delta}y\right)^{\alpha+k-1}e^{-y}\frac{\delta}{1+\delta}dy \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+k)}{k!\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{1+\delta}\right)^\alpha\left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)^k \\ &= \binom{\alpha+k-1}{k}\left(\frac{1}{1+\delta}\right)^\alpha\left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)^k,\end{aligned}$$

$k=0,1,\ldots$, concluímos que

$$X \frown BinomialNegativa\left(\alpha,\tfrac{1}{1+\delta}\right).$$

Se $X \frown Poisson(\lambda)$, então $\mathrm{var}(X)=\mathbb{E}(X)=\lambda$, e portanto o índice de dispersão $I(X)=\frac{\mathrm{var}(X)}{\mathbb{E}(X)}=1$, enquanto se $X \frown BinomialNegativa\left(\alpha,\frac{1}{1+\delta}\right)$, então $\mathrm{var}(X)=\alpha\delta(1+\delta)$ e $\mathbb{E}(X)=\alpha\delta$, pelo que o índice de dispersão é $I(X)=1+\delta$. A Binomial Negativa é portanto mais dispersa e flexível

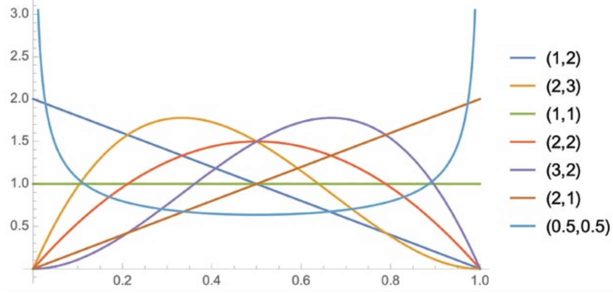


Figura 3. Densidades de probabilidade $Beta(p,q)$.

do que a Poisson, ganhando por isso popularidade na análise de dados, nomeadamente em Bioestatística e em Ecologia (Johnson *et al.*, 2005, Cap. 5, pp. 232-233).

Por outro lado, por vezes é tentador aleatorizar o parâmetro p que surge, por exemplo, nos modelos Binomial e Binomial Negativo, o qual, sendo o valor de uma probabilidade, toma valores entre 0 e 1. Nesse caso, podemos desenvolver um modelo hierárquico considerando que a variável aleatória correspondente, P, tem distribuição BetaBoop.

- Seja $B|P \frown Bernoulli(P)$, em que P tem suporte $[0,1]$ e função de distribuição F_P. Como $\int_0^1 p\, dF_P(p)=\mathbb{E}[P]$, resulta

$$B=\left\{\begin{array}{cc}0 & 1\\ 1-\mathbb{E}[P] & \mathbb{E}[P]\end{array}\right. .$$

Por exemplo, se $P \frown BetaBoop(1,1,1,2)$, então obtém-se $B \frown Bernoulli(\frac{1}{4})$.

Note-se que, no caso em que a distribuição de P é simétrica, resulta sempre $B \frown Bernoulli(\frac{1}{2})$.

Podemos também observar que, se $P \frown Beta(\mu,\nu)$, então a probabilidade de sucesso é maior do que a probabilidade de insucesso se e só se $\mu>\nu$, o que é explicado pelo facto de se ter $\mathbb{E}[P]=\frac{\mu}{\mu+\nu}$.

- Seja $X|P \frown Binomial(n,P)$ e $P \frown Uniforme(0,1)$. Como, nesse caso,

$$\binom{n}{k}\int_0^1 p^k(1-p)^{n-k}\,dp=\binom{n}{k}B(k+1,n+1-k)=\frac{1}{n+1},$$

tem-se $\mathbb{P}[X=k]=\frac{1}{n+1}$, $k=0,1,\ldots,n$, ou seja,

$$X \frown UniformeDiscreta\{0,\ldots,n\}.$$

Observe-se que $P \frown Uniforme(0,1)$ pode ser considerado como informação "nula" sobre o valor de p, resultando por isso equiprobabilidade discreta.

Mais geralmente, se $X|P \frown Binomial(n,P)$ em que $P \frown Beta(\mu,\nu)$, obtém-se

$$\begin{aligned} p_k = \mathbb{P}[X=k] &= \binom{n}{k} \int_0^1 p^k (1-p)^{n-k} \frac{p^{\mu-1}(1-p)^{\nu-1}}{B(\mu,\nu)}\, \mathrm{d}p \\ &= \frac{\binom{n}{k}}{B(\mu,\nu)} \int_0^1 p^{k+\mu-1}(1-p)^{n-k+\nu-1} \mathrm{d}p \\ &= \frac{\binom{n}{k}}{B(\mu,\nu)} B(k+\mu, n-k+\nu) \\ &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \frac{\frac{\Gamma(k+\mu)\Gamma(n-k+\nu)}{\Gamma(n+\mu+\nu)}}{\frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)}} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\Gamma(k+\mu)\Gamma(n-k+\nu)\Gamma(\mu+\nu)}{\Gamma(n+\mu+\nu)\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}, \\ & k = 0,1,...,n. \end{aligned}$$

Casos simples destes modelos Beta-Binomial (Johnson *et al.*, 2005, p. 253) são:

a)

$$P \frown Beta(2,1) \Longrightarrow p_k = \frac{n!}{k!.(n-k)!.} \frac{\Gamma(k+2)\,\Gamma(n-k+1)\,\Gamma(3)}{\Gamma(n+3)\,\Gamma(2)\,\Gamma(1)} = \frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}, \; k = 0,1,...,n.$$

b)

$$P \frown Beta(1,2) \Longrightarrow p_k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \frac{\Gamma(k+1)\,\Gamma(n-k+2)\,\Gamma(3)}{\Gamma(n+3)\,\Gamma(1)\,\Gamma(2)} = \frac{2(n-k+1)}{(n+1)(n+2)}, \; k = 0,1,...,n.$$

c)

$$P \frown Beta(2,2) \Longrightarrow p_k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot \frac{\Gamma(k+2)\,\Gamma(n-k+2)\,\Gamma(4)}{\Gamma(n+4)\,\Gamma(2)\,\Gamma(2)} = \frac{6(k+1)\,(n-k+1)}{(n+1)(n+2)(n+3)}, \; k = 0,1,...,n.$$

d)

$$P \frown Beta(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) \Longrightarrow p_k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})\Gamma(n-k+\frac{1}{2})\Gamma(1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})\Gamma(n-k+\frac{1}{2})}{\pi\, k!\,(n \quad k)!}, \; k = 0,1,...,n$$

ou seja,

$$p_k = 2^{2-2n} \binom{2k-1}{k-1} \binom{2n-2k-1}{n-k-1},$$

$k = 1,\ldots,n-1$, e $p_0 = p_n = 2^{1-2n}\binom{2n-1}{n-1}$.

• Seja $X|P \frown Binomial(n,P)$ com $P \frown BetaBoop(1,1,1,2)$. Usando a fórmula 4.253 1 de Grashteyn and Ryzhik (1980, p. 538),

$$\int_0^1 x^{p-1}\,(1-x^r)^{q-1}(-\ln x)\,\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{r^2}\, B\left(\tfrac{p}{r},q\right)\left[\psi\left(\tfrac{p}{r}+q\right) - \psi\left(\tfrac{p}{r}\right)\right],$$

onde $\psi(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \ln\Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$, conclui-se que

$$\begin{aligned} p_k &= \tfrac{n!}{k!\,(n-k)!} \int_0^1 p^k\,(1-p)^{n-k}\,(-\ln p)\,\mathrm{d}p = \\ &= \tfrac{n!}{k!\,(n-k)!}\,\beta(k+1,n-k+1,1,2) = \\ &= \tfrac{1}{n+1}\,[\psi(n+2) - \psi(k+1)]\,, \; k = 0,1,...,n. \end{aligned}$$

• Seja $X|P \frown Geométrica(P)$ onde $P \frown Uniforme(0,1)$. Então $\mathbb{P}[X=k] = \int_0^1 p\,(1-p)^{k-1}\,\mathrm{d}p = B(2,k) = \frac{1}{k\,(k+1)}$, $k = 1,2,\ldots$

Mais geralmente, se $X|P \frown Geométrica(P)$ em que $P \frown Beta(\mu,\nu)$, tem-se

$$\begin{aligned} p_k &= \int_0^1 p\,(1-p)^{k-1}\,\tfrac{p^{\mu-1}(1-p)^{\nu-1}}{B(\mu,\nu)}\,\mathrm{d}p \\ &= \tfrac{\mu\,\Gamma(\mu+\nu)\,\Gamma(\nu+k-1)}{\Gamma(\nu)\,\Gamma(\mu+\nu+k)}. \end{aligned}$$

Por exemplo, se $\mu = 2$ e $\nu = 1$, obtém-se

$$p_k = \tfrac{2\,\Gamma(k)\,\Gamma(3)}{\Gamma(k+3)} = \tfrac{4}{k\,(k+1)\,(k+2)},\; k = 1,2,\ldots.$$

• Seja $X|P \frown Geométrica(P)$ com $P \frown BetaBoop(1,1,1,2)$. Então, da fórmula 4.253 de Gradshteynand Ryzhik (1980) atrás transcrita, vem

$$\begin{aligned} p_k &= \int_0^1 p\,(1-p)^{k-1}(-\ln p)\,\mathrm{d}p \\ &= \beta(2,k,1,2) \\ &= B(2,k)\;[\psi(2+k) - \psi(2)]. \end{aligned}$$

Como $\Gamma'(z+1) = \big(z\Gamma(z)\big)' = z\,\Gamma'(z) + \Gamma(z)$, tem-se

$$\tfrac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)} = \tfrac{z\,\Gamma'(z)}{z\,\Gamma(z)} + \tfrac{\Gamma(z)}{z\,\Gamma(z)}$$

e, consequentemente, $\psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z}$. Deduz-se então que

$$p_k = \tfrac{1}{k\,(k+1)}\,\left[\psi(k) + \tfrac{1}{k} + \tfrac{1}{k+1} - \psi(2)\right].$$

Continuando a aplicar a expressão recursiva para

ψ, obtém-se $p_k = \frac{H_{k+1}-1}{k(k+1)}$, $k = 1, 2, \ldots$, onde $H_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$ é o n-ésimo número harmónico.

Contração e expansão resultando de produtos, divisões e exponenciações usando Betas ou BetaBoops

Se X e Y forem variáveis aleatórias independentes e o suporte de Y for $[0,1]$, então o produto $V = XY$ contrai Y, enquanto a exponenciação $W = X^Y$ e a divisão $T = \frac{X}{Y}$ expandem Y. Vamos dar alguns exemplos "*neste vasto mundo de carecas e boas*", como comentou Jorge Amado no seu capítulo de *O Mistério dos MMM*.[3]

No que se refere a contração devida a multiplicação por *BetaBoop*, começamos por apresentar um resultado sugestivo (Brilhante *et al.*, 2010).

Teorema 1. *Sejam* $X \frown Gama(\alpha, 1)$ *e* $Y \frown Beta(p, \alpha - p)$ *independentes,* $0 < p < \alpha$. *Então* $W = XY \frown Gama(p, 1)$.

Demonstração. Para $z \in (0, \infty)$,

$$\begin{aligned} f_W(z) &= \frac{1}{\Gamma(p)\,\Gamma(\alpha-p)} \int_z^\infty \left(\frac{z}{y}\right)^{p-1} \left(1 - \frac{z}{y}\right)^{\alpha-p-1} y^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{-y}\,\frac{\mathrm{d}y}{y} \\ &= \frac{z^{p-1}}{\Gamma(p)\,\Gamma(\alpha-p)} \int_z^\infty (y-z)^{\alpha-p-1}\,\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y \\ &\underset{y-z=w}{=} \frac{z^{p-1}}{\Gamma(p)\,\Gamma(\alpha-p)} \int_0^\infty w^{\alpha-p-1}\,\mathrm{e}^{-w}\,\mathrm{e}^{-z}\,\mathrm{d}w = \frac{z^{p-1}\,\mathrm{e}^{-z}}{\Gamma(p)}. \end{aligned}$$

Para $z \leq 0$, tem-se $f_W(z) = 0$. □

Casos especiais:

1. Se $X \frown Gama(\alpha, 1)$ e $Y \frown Beta(\alpha - 1, 1)$ independentes, então $W = XY \frown Gama(\alpha - 1, 1)$.

2. Se $X \frown Gama(\alpha, 1)$ e $Y \frown Beta(1, \alpha - 1)$ independentes, então $W = XY \frown Exponencial(1)$.

Tendo em conta a equivalência $V \frown Gama(\alpha, 1) \iff \mathrm{e}^{-V} \frown BetaBoop(1, 1, 1, \alpha)$, obtém-se o resultado que se segue.

Teorema 2. *Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes,* $X \frown BetaBoop(1, 1, 1, \alpha + 1)$ *e* $Y \frown Beta(\alpha, 1)$. *Então* $X^Y \frown BetaBoop(1, 1, 1, \alpha)$.

Corolário 2.1. *Se* $X \frown BetaBoop(1, 1, 1, n+1)$ *e* $Y \frown Beta(n, 1)$ *são independentes, então* $X^Y \frown BetaBoop(1, 1, 1, n)$.

No caso de $\alpha \in \mathbb{N}$, reinterpretando em termos de produtos e estatísticas ordinais de variáveis aleatórias uniformes independentes, se $U_k \frown Uniforme(0, 1)$, $1 \leq k \leq n+1$, independentes e independentes de $U_j^* \frown Uniforme(0, 1)$, $1 \leq j \leq n$, também independentes, então

$$\left(\prod_{k=1}^{n+1} U_k\right)^{U_{n:n}^*} \overset{\mathrm{d}}{=} \prod_{k=1}^{n} U_k.$$

Em particular, para $n = 1$, resulta que se U_1, U_2, U_3 forem variáveis independentes com distribuição Uniforme padrão, então $(U_1 U_2)^{U_3} \frown Uniforme(0, 1)$. Este caso ilustra expressivamente que a exponenciação expande a contração operada pela multiplicação.

Tal como a transformada de Laplace $\mathcal{L}_X(s) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-sX}]$ é um instrumento facilitador do estudo de somas de variáveis aleatórias positivas independentes, a transformada de Mellin $\mathcal{M}_X(s) = \mathbb{E}[X^s]$, que converge numa banda vertical contendo pelo menos o eixo imaginário, pode simplificar a identificação de produtos de variáveis aleatórias positivas independentes. Se $X \geq 0$ e $Y \geq 0$ forem independentes, então $\mathcal{M}_{XY}(s) = \mathbb{E}[(XY)^s] = \mathbb{E}[(X)^s]\,\mathbb{E}[(Y)^s] = \mathcal{M}_X(s)\,\mathcal{M}_Y(s)$ na intersecção das suas bandas de convergência. Por exemplo $\mathcal{M}_U(s) = \int_0^1 x^s \mathrm{d}x = \frac{1}{1+s}$ e

$$\int_0^1 x^s \frac{(-\ln x)^{Q-1}}{\Gamma(Q)} \mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{(1+s)t}\, \frac{t^{Q-1}}{\Gamma(Q)} \mathrm{d}t = \left(\frac{1}{1+s}\right)^Q$$

é uma forma simples de identificar

$$f(x) = \frac{(-\ln x)^{Q-1}}{\Gamma(Q)}\, \mathbb{I}_{(0,1]}(x)$$

como densidade do produto $U_1 \cdots U_n$ de n variáveis *Uniforme*$(0, 1)$ independentes.

Claro que este método só é útil se conseguirmos identificar a distribuição do produto de transformadas de Mellin. Por exemplo, $U^{1/p} \frown Beta(p, 1)$, pelo que

$$\mathcal{M}_{U^{1/p}}(s) = \int_0^1 p\, x^{p+s-1} \mathrm{d}x = \frac{p}{p+s}.$$

Portanto, se $U_1 \overset{\mathrm{d}}{=} U_2 \frown Uniforme(0, 1)$, independentes, então $\mathcal{M}_{U_1^{1/\mu} U_2^{1/\nu}}(s) = \frac{\mu}{\mu+s}\,\frac{\nu}{\nu+s}$. Note-se que não conseguimos ir mais longe do que isto se $\mu \neq \nu$. Nestas situações há que recorrer à técnica usual para determinar a densidade do produto de $U_1^{1/\mu}$ por $U_2^{1/\nu}$. Para $z \in (0, 1)$,

$$\int_z^1 \mu \left(\frac{z}{t}\right)^{\mu-1} \nu t^{\nu-1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \begin{cases} \mu^2 z^{\mu-1}(-\ln z)\, \mathbb{I}_{(0,1]}(z) & ,\ \mu = \nu \\ \frac{\mu\nu}{\nu-\mu} z^{\mu-1}\,(1 - z^{\nu-\mu})\mathbb{I}_{(0,1]}(z) & ,\ \mu < \nu \end{cases},$$

de onde se conclui que $U_1^{1/\mu}\, U_2^{1/\mu} \frown BetaBoop(\mu, 1, 1, 2)$ e

$$U_1^{1/\mu}\, U_2^{1/\nu} \frown \mathcal{K}_{\nu-\mu;\frac{\mu}{\nu-\mu},2,1,1}, \ \mu < \nu.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{X_{p,1,1,Q}}(s) &= \frac{p^Q}{\Gamma(Q)} \int_0^1 x^{s+p-1} \, (-\ln x)^{Q-1} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{p^Q}{\Gamma(Q)} \frac{\Gamma(Q)}{(p+s)^Q} = \left(\frac{p}{p+s}\right)^Q\end{aligned}$$

e, consequentemente,

$$X_{p,1,1,Q} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \prod_{k=1}^{Q} U_k^{1/p}, \ p > 0, Q \in \mathbb{N}.$$

A transformada de Mellin de $X_{p,q} \frown Beta(p,q)$ é

$$\mathcal{M}_{X_{p,q}}(s) = \frac{B(p+s,q)}{B(p,q)} = \frac{\Gamma(p+s)}{\Gamma(p)} \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p+q+s)}.$$

Observe-se a contração $X_{p,q}\, X_{p-1,1} \stackrel{\mathrm{d}}{=} X_{p-1,q+1}$, pois

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{X_{p,q}}(s)\mathcal{M}_{X_{p-1,1}}(s) &= \frac{\Gamma(p+s)}{\Gamma(p)} \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p+q+s)} \frac{p-1}{p-1+s} \\ &= \frac{\Gamma(p+s-1)}{\Gamma(p-1)} \frac{\Gamma(p-1+q+1)}{\Gamma(p-1+q+1+s)} \\ &= \mathcal{M}_{X_{p-1,q+1}}(s).\end{aligned}$$

Como $U_{k:k} \frown Beta(k,1)$, com transformada de Mellin $\mathcal{M}_{U_{k:k}}(s) = \frac{k}{k+s} = \frac{B(k+s,1)}{B(k,1)}$, tem-se

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n} \frac{B(k+s,1)}{B(k,1)} &= \prod_{k=1}^{n} \frac{k\,\Gamma(k+s)}{\Gamma(k+s+1)} \\ &= n! \frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(2+s)} \frac{\Gamma(2+s)}{\Gamma(3+s)} \frac{\Gamma(3+s)}{\Gamma(4+s)} \cdots \frac{\Gamma(n+s)}{\Gamma(1+n+s)} \\ &= n! \frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(1+n+s)} \\ &= \frac{B(1+s,n)}{B(1,n)} = \mathcal{M}_{U_{1:n}}(s).\end{aligned}$$

Consequentemente

$$\prod_{k=1}^{n} U_{k:k} \stackrel{\mathrm{d}}{=} U_{1:n}{}^{[4]},$$

que exibe de forma muito expressiva a contração que resulta de multiplicar por variáveis com suporte $[0,1]$ – o produto de máximos tem a distribuição do mínimo! Observe-se ainda que

$$U_{1:k-1}\, U_{k:n+k} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \prod_{j=1}^{n+k} U_{j:j} \stackrel{\mathrm{d}}{=} U_{1:n+k}.$$

No que se refere à expansão que resulta da divisão por uma variável aleatória com suporte $[0,1]$, exemplificamos com a clássica variável *Slash* e com o quociente de $X \frown Gama(\alpha, 1)$ por $U \frown Uniforme(0,1)$, independentes.

Em estudos de robustez (Hoaglin *et al.*, 1992) é muito usada a variável Gaussiana Dividida ("*Slash*"), que é a variável $Z \frown Gaussiana(0,1)$ dividida pela variável $U \frown Uniforme(0,1)$, com Z e U independentes. Esta variável tem função densidade de probabilidade

$$f_{\frac{Z}{U}}(x) = \int f_Z(xy) f_U(y)\, y \, \mathrm{d}y$$

$$= \begin{cases} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2y^2}{2}} y \, \mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,x^2} \left(-\mathrm{e}^{-\frac{x^2y^2}{2}}\right]_0^1 = \frac{1-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\,\pi}\,x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} y \, \mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \left(\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2\sqrt{2\,\pi}} & \text{se } x = 0 \end{cases},$$

e ao dividir por valores de $(0,1)$ estamos a obter caudas muito mais pesadas do que as da Gaussiana (que, a despropósito se diga, é a variável de caudas mais leves na classe das leis infinitamente divisíveis[5], ver figura 4(a)).

Um outro exemplo simples é $Y = \frac{X}{U}$, com $X \frown Gama(\alpha,1)$ e $U \frown Uniforme(0,1)$ independentes. Para $z \in (0,\infty)$,

$$\begin{aligned}f_Y(z) &= \int f_X(zu) f_U(u)\, |u| \, \mathrm{d}u \\ &= \int_0^1 \frac{(zu)^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-zu}}{\Gamma(\alpha)} \, u \, \mathrm{d}u \\ &\underset{w=zu}{=} \int_0^z \frac{w^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-w}}{\Gamma(\alpha)} \frac{w}{z} \frac{\mathrm{d}w}{z} \\ &= \frac{\gamma(\alpha+1,z)}{\Gamma(\alpha)\, z^2},\end{aligned}$$

[3] Novela policial em 10 capítulos, coordenada por João Condé e escrita por 10 mestres da língua e da imaginação, Viriato Correa, Dinah Silveira de Queiroz, Lúcio Cardoso, Herberto Sales, Jorge Amado, José Condé, João Guimarães Rosa, Antonio Callado, Orígenes Lessa e Rachel de Queiroz, cada um tentando dificultar mais a tarefa do escritor do capítulo seguinte. Foi editada em Portugal com a chancela de *Livros do Brasil*. – neste caso carecas serão os modelos U e as boas a Beta e a BettaBoop.

[4] Obviamente esta expressão tem que ser interpretada assumindo que $U_{1:1} = U_{11}$, $U_{2:2} = \max\{U_{21}, U_{22}\}$, $U_{3:3} = \max\{U_{31}, U_{32}, U_{33}\}$,..., $U_{n:n} = \max\{U_{n1}, ..., U_{nn}\}$, com as variáveis U_{jk}, $j = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, j$, independentes entre si.

[5] As distribuições infinitamente divisíveis sem fatores primos e as distribuições indecomponíveis são os tijolos da aritmética das probabilidades, pois o teorema da fatorização de Khinchine estabelece que qualquer distribuição $\mathcal{P}$ admite ser decomposta como $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2$ no semigrupo de convolução, sendo $\mathcal{P}_1$ infinitamente divisível sem fatores indecomponíveis e $\mathcal{P}_2$ degenerada ou representável como convolução finita ou numerável de distribuições indecomponíveis.

onde $\gamma(\alpha,z) = \int_0^z w^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-w}\mathrm{d}w$ é a função Gama incompleta inferior, ver figura 4(b).

Para quem seja curioso e masoquista indicamos um recente trabalho de Zörnig (2019) em que com grande generalidade se investiga o resultado da divisão por variáveis *Beta* – e fica o desafio da divisão por *BetaBoop*. Por exemplo, se $X \frown Beta(p,1)$ e $Y \frown BetaBoop(1,1,1,n)$ são independentes, tem-se

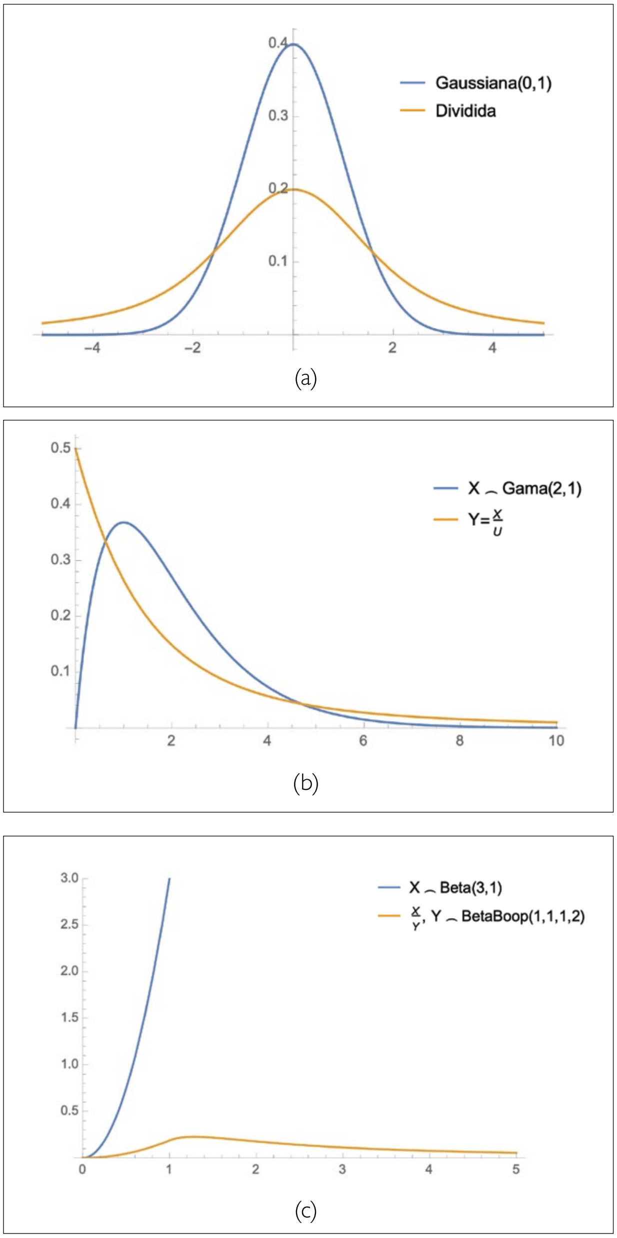


Figura 4. Expansão que resulta da divisão por uma variável aleatória com suporte [0,1].

$$f_{\frac{X}{Y}}(z) = \frac{p\,z^{p-1}}{\Gamma(n)}\int_0^{\min\left\{1,\frac{1}{z}\right\}} y^p\,(-\ln y)^{n-1}\mathrm{d}y$$

$$= \begin{cases} \frac{p\,z^{p-1}}{\Gamma(n)}\beta(p+1,1,1,n) = \frac{p\,z^{p-1}}{(p+1)^n} & ,0<z<1 \\ \frac{p\,z^{p-1}}{\Gamma(n)}\int_{\ln z}^{\infty}\mathrm{e}^{-(p+1)w}w^{n-1}\mathrm{d}w = \dfrac{p\,z^{p-1}\,\Gamma(n,\ln z^{p+1})}{(p+1)^n\,\Gamma(n)} & ,z\geq 1 \end{cases},$$

caso este que se ilustra na figura 4(c).

REFERÊNCIAS

[1] Abramowitz, M.; Stegun, I. A. (1972). *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, 8th ed., Dover, New York, USA.

[2] Bertrand, J. (1889). *Calcul des Probabilités*, Gauthier--Villars, Paris, France.

[3] Borel, E. (1909). "Les Probabilités Dénombrables et Leurs Applications Arithmétiques". *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **27**, 247-271.

[4] Brilhante, M. F.; Gomes, M. I.; Mendonça, S.; Pestana, D.; Pestana, P. (2023). "Generalized Beta Models and Population Growth, so Many Routes to Chaos". *Fractal Fract.*, **7**, 194.

[5] Brilhante, M. F.; Mendonça, S.; Pestana, D.; Sequeira, F. (2010). "Using Products and Powers of Products to Test Uniformity". *In Proceedings of the ITI 2010*, 32nd International Conference on Information Technology Interfaces, Cavtat, Croatia, pp. 509-514.

[6] Erdélyi, A.; Magnus, W.; Oberhettinger, F.; Tricomi, F. G. (1953). *Higher Transcendental Functions*, vol I; McGraw--Hill, New York, USA.

[7] Fisher R. A. (1932). *Statistical Methods for Research Workers*, 4th ed., Oliver and Boyd, Edinburgh and London, UK.

[8] Gradshteyn, I. S.; Ryzhik, I. M. (1980). *Table of Integrals, Series, and Products* 6th ed., Academic Press, San Diego, USA.

[9] Hoaglin, D. C.; Mosteller, F.; Tukey, J. W. (1992).*Análise Exploratória de Dados, Técnicas Robustas: Um Guia*, Salamandra, Lisboa, Portugal.

[10] Johnson, N. L.; Kemp, A. W.; Kotz, S. (2005). *Continuous Univariate Distributions*, vol. 2, Wiley, New York, USA.

[11] Johnson, N. L.; Kotz, S.; Balakrishnan, N. (1995). *Continuous Univariate Distributions*, vol. 2, Wiley, New York, USA.

[12] Kolmogorov, A. N. (1933). *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitrechnung*, Ergebnisse Der Mathematik. (English translation: Kolmogorov, A.N. *Foundations of Probability*, Chelsea Publishing Company, New York, USA, 1950.)

[13] Kumaraswamy, P. (1980). "A Generalized Probability Density Function for Double-Bounded Random Processes". *Journal of Hydrology*, **46(1-2)**, 79-88.

[14] Mendonça, S.; Pestana, D.; Santos, R. (2007). *Diogo Pacheco d'Amorim's The Elements of Probability Calculus Diplomatic Bilingual Edition of Pacheco D'amorim's 1914 Thesis on the Construction of Probability*, 2007. Annotated English translation. *https://estudogeral.uc.pt/handle/10316/113710*

[15] Pacheco d'Amorim, D. (1914). *Elementos de Cálculo das Probabilidades*, Imprensa da Universidade, Coimbra, Portugal.

[16] Pearson, K. (1900). "On the Criterion that a Given System of Deviations from the Probable in the Case of a Correlated System of Variables is Such that it can be Reasonably Supposed to have Arisen from Random Sampling". *Philosophical Magazine*, Ser. 5 **50** (302), 157-175. *https://doi.org/10.1080/14786440009463897*

[17] Santos, R. (2008).*Probabilidade Circa 1914 e a Construção de Diogo Pacheco d'Amorim*, Universidade de Lisboa. *http://hdl.handle.net/10451/1542*

[18] Whittaker, E. T.; Watson, G. N. (2013). *A Course of Modern Analysis*, 4th ed., Cambridge University Press, Cambridge, UK.

[19] Zörnig, P. (2019). "On Generalized Slash Distributions: Representation by Hypergeometric Functions". *Stats*, **2** (3), 371-387. *https://doi.org/10.3390/stats2030026*

Agradecimento: Este trabalho é financiado por Fundos Nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia no âmbito do projeto UIDB/00006/2020. DOI: 10.54499/UIDB/00006/2020 (*https://doi.org/10.54499/UIDB/00006/2020*).

Agradecemos também o meticuloso relatório do(a) revisor(a) científico, com abundantes indicações detalhadas que melhoraram o texto, clarificando passos importantes.

SOBRE OS AUTORES

Maria de Fátima Brilhante é Professora Associada da Universidade dos Açores, e investigadora do Centro de Estatística e Aplicações. Tem trabalhos publicados sobre evolução estocástica de populações, fractalidade e caos, estudentização interna e externa, meta análise, e influência de COVID19 no turismo. A convite da Sociedade Portuguesa de Estatística, publicou um curso sobre Meta Análise.

Maria Ivette Gomes, doutorada em Probabilidade e Estatística (Sheffield, UK), foi Professora de Estatística, Estatística Computacional, Estatísticas Ordinais e Teoria de Valores Extremos na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, tendo-lhe sido conferido o título de Professora Emérita. É membro da Academia das Ciências de Lisboa, investigadora do Centro de Estatística e Aplicações e do Instituto de Investigação Científica Bento da Rocha Cabral. Foi editora de Revstat - Statistical Journal, e editora Associada de Extremes, entre outras, e vice-presidente do International Statistical Institute. Em 2013 recebeu o Prémio de Carreira da Sociedade Portuguesa de Estatística, sendo eleita membro honorário.

Sandra Mendonça é Professora Associada da Universidade da Madeira, de que foi Vice-Reitora, e investigadora do Centro de Estatística e Aplicações. Tem trabalhos publicados sobre convexidade generalizada, filtragem geométrica e estatísticas ordinais e extremos, dinâmica não linear e caos, e meta análise.

Dinis Pestana, doutorado em Probabilidade e Estatística (Sheffield, UK), foi Professor de Probabilidade, Bioestatística, Amostragem na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. É investigador do Centro de Estatística e Aplicações e do Instituto de Investigação Científica Bento da Rocha Cabral. Em 2013 recebeu o Prémio de Carreira da Sociedade Portuguesa de Estatística, sendo eleito membro honorário.