UMA NOTA ACERCA DOS NÚMEROS PERMÚLTIPLOS

Eudes Antonio Costa[a], Jaqueline Ribeiro Dias[b]
UFT, Arraias, Matemática[a, b]
eudes@uft.edu.br[a], jaqueline.ribeiro1@uft.edu.br[b]

1. INTRODUÇÃO

Consideraremos o conjunto dos números inteiros não negativos (naturais) denotado por $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, e por conveniência diremos apenas que n é um número (natural) para todo o $n \in \mathbb{Z}_+$.

Seja n um número não nulo no sistema posicional decimal (base 10), com $k+1$ algarismos, e escrito na forma $n = a_k \ldots a_1 a_0$, isto é, $n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + a_1 \cdot 10^1 + a_0$, em que $a_i \in D = \{0, 1, \cdots, 8, 9\}$ e $a_k \neq 0$.

Considere ainda o número n' também com os mesmos $k+1$ algarismos (e a mesma quantidade de algarismos), da forma $n' = a_{k'} a_{k'-1} \ldots a'_1 a'_0$, obtido do número n permutando (alternando ou trocando a posição de) os seus algarismos, isto é, a'_j $(0 \leq j \leq k)$ é igual a algum a_i $(0 \leq i \leq k)$. Por exemplo os números 2024, 2042, 2204, 2240, 4022, 4202 e 4220 são números com quatro algarismos obtidos pela permutação dos algarismos do número 2024. Um estudo sobre propriedades dos *números permutados*, números obtidos pela permutação dos algarismos de um número fixo, pode ser encontrado em [4, 6].

Definição 1.1. *Sejam n e n_1 números permutados distintos. Se n_1 for múltiplo de n, então estes números são chamados permúltiplos.*

Exemplo 1.2. *Os números 102564 e 410256 são permúltiplos, visto que* $410256 = 4 \cdot 102564$ *(veja [2]). Os números* 21978 *e* 87912 *também são permúltiplos, pois* $87912 = 4 \cdot 21978$ *(veja [15, 16]). Da mesma forma, além de 1089 e 9801, os números* 10989 *e* 98901 *são permúltiplos, pois* $98901 = 9 \cdot 10989$ *(veja [11, 12, 16]).*

O termo *permúltiplo* foi usado por Holt (2015) e é uma justaposição das palavras permutação e múltiplo. Nos interessantes trabalhos [11, 12], Holt exibe alguns exemplos e também apresenta propriedades acerca de alguns números *palíntuplos* (palíndromos e múltiplos) na base 10 e noutras bases.

Nestas notas, o nosso interesse é mostrar como gerar ou encontrar outros números *permúltiplos*, apresentando uma forma, ou um procedimento, para obter e construir outros (infinitos) números nesta classe.

Neste trabalho vamos estudar pares de números inteiros positivos n e n_1 formados pelos mesmos algarismos, e tais que n seja um divisor de n_1, denominados permúltiplos. Por exemplo, $n = 1089$, $n_1 = 9801$ são permúltiplos, visto que 9801 = 9. 1089 e são formados pelos mesmos algarismos, quais sejam: 0, 1, 8 e 9.

2. NÚMEROS PERMÚLTIPLOS CONCATENADOS

Primeiramente vamos introduzir e utilizar a notação $n_{[k]}$, que representa o número n concatenado ou justaposto k vezes. Por exemplo, se $n = 2024$ e $k = 3$ então $2024_{[3]} = 202420242024$.

Nesta secção inicialmente tomamos um número n, e realizamos a concatenação (ou justaposição) deste número k vezes ($k \geq 1$).

Aplicando o princípio de indução matemática em $k \geq 1$, mostra-se que:

Lema 2.1. [9] *Seja n um número com $t \geq 1$ algarismos. Então o número n, concatenado k vezes é escrito na forma*

$$n_{[k]} = n \times 10^{(k-1)t} + \cdots + n \times 10^{2t} + n \times 10^t + n \,.$$

Exemplo 2.2. Sendo $n = 142857$ um número com seis algarismos e $2 \leq k \leq 4$, temos que:

$$142857_{[2]} = 142857142857 = 142857 \times 10^6 + 142857 \;;$$

$$\begin{aligned} 142857_{[3]} &= 142857142857142857 \\ &= 142857 \times 10^{12} + 142857 \times 10^6 + 142857; \\ 142857_{[4]} &= 142857 \times 10^{18} + 142857 \times 10^{12} \\ &\quad + 142857 \times 10^6 + 142857. \end{aligned}$$

O exemplo a seguir explora, em cada k-etapa de concatenação, o que ocorre quando n e n' forem permúltiplos.

Exemplo 2.3. *Tomando* $n = 142857$, $n' = 428571$ *com* $3 \cdot n = n'$, *e usando os resultados obtidos no exemplo 2.2,* *obtemos que:*

$$\begin{aligned}3 \cdot 142857_{[2]} &= 3(142857 \times 10^6 + 142857)\\ &= 3 \cdot 142857 \times 10^6 + 3 \cdot 142857\\ &= 428571 \times 10^6 + 428571 = 428571_{[2]}\ .\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}3 \cdot 142857_{[3]} &= 3(142857 \times 10^{12} + 142857 \times 10^6 + 142857)\\ &= 3 \cdot 142857 \times 10^{12} + 3 \cdot 142857 \times 10^6 + 3 \cdot 142857\\ &= 428571 \times 10^{12} + 428571 \times 10^6 + 428571\\ &= 428571_{[3]}\ .\end{aligned}$$

De igual maneira, obtém-se que $3 \cdot 142857_{[4]} = 428571_{[4]}$.

O exemplo anterior pode ser generalizado pelo seguinte resultado.

Teorema 2.4. *Sejam* n *e* $n' = r \cdot n$ *números permúltiplos com* $t \geq 1$ *algarismos. Então os números* $n_{[k]}$ *e* $n'_{[k]}$ *também são permúltiplos para todo o* $k \geq 1$.

Demonstração. Para $k = 1$ verifica-se o resultado, visto que $n' = r \cdot n$.

Admitindo que o resultado é válido para algum $k \geq 1$, mostraremos que o resultado também é válido para $k + 1$. Segue do lema 2.1 que

$$n_{[k+1]} = n \cdot 10^{kt} + n_{[k]}\ .$$

Assim,

$$\begin{aligned}r \cdot n_{[k+1]} &= r(n \cdot 10^{kt} + n_{[k]})\\ &= r \cdot n \times 10^{kt} + r \cdot n_{[k]}\\ &\overset{hip\ ind}{=} n' \times 10^{kt} + n'_{[k]}\\ &= n'_{[k+1]}\ .\end{aligned}$$

□

3. NÚMEROS PERMÚLTIPLOS CONCATENADOS ALTERNADOS

Agora vamos usar a notação $n_{[k,1]}$, que representa o número n concatenado ou justaposto k vezes, alternado por, ou acrescido de, um algarismo 0 entre cada elemento n concatenado. Por exemplo, se $n = 2024$ e $k = 3$ então $2024_{[3,1]} = 20240202402024$.

Nesta secção inicialmente tomamos um número n, e realizamos a concatenação alternada por 0 deste número k vezes ($k \geq 1$). Aplicando o princípio de indução matemática em $k \geq 1$, mostra-se que:

Lema 3.1. *Seja* n *um número com* $t \geq 1$ *algarismos. Então o número* $n_{[k,1]}$ *é escrito na forma*

$$n_{[k,1]} = n \times 10^{(k-1)t+(k-1)} + \cdots + n \times 10^{2t+2} + n \times 10^{t+1} + n\ .$$

Exemplo 3.2. *Sendo* $n = 21978$ *um número com cinco algarismos e* $2 \leq k \leq 4$*, temos que:*

$$\begin{aligned}21978_{[2,1]} &= 21978021978 = 21978 \times 10^6 + 21978\ ;\\ 21978_{[3,1]} &= 21978021978021978\\ &= 21978 \times 10^{12} + 21978 \times 10^6 + 21978\ ;\\ 21978_{[4,1]} &= 21978 \times 10^{18} + 21978 \times 10^{12} + 21978 \times 10^6 + 142857\ .\end{aligned}$$

Sabendo que $n = 21978$ *e* $n' = 87912$ *são permúltiplos com* $4 \cdot n = n'$*, tem-se:*

$$\begin{aligned}4 \cdot 21978_{[2,1]} &= 4(21978 \times 10^6 + 21978)\\ &= 4 \cdot 21978 \times 10^6 + 4 \cdot 21978\\ &= 87912 \times 10^6 + 87912 = 87912_{[2,1]}\ .\end{aligned}$$

Por último,

$$\begin{aligned}4 \cdot 21978_{[4,1]} &= 4(21978 \times 10^{18} + 21978 \times 10^{12}\\ &\quad + 21978 \times 10^6 + 21978)\\ &= 87912 \times 10^{18} + 87912 \times 10^{12}\\ &\quad + 87912 \times 10^6 + 87912\\ &= 87912_{[4,1]}\ .\end{aligned}$$

De maneira recursiva, podemos generalizar este tipo de concatenação alternada para qualquer quantidade de zeros, mesmo para uma quantidade distinta de zeros em cada bloco.

Considere

$$Z_r = \underbrace{00\ldots00}_{r \text{ vezes}} \text{ com } r \geq 0.$$

Assim, dados os inteiros $k, r_1, \ldots, r_{k-1}$, a concatenação alternada por zeros define-se por:

$$n_{[k,r_{k-1},\ldots,r_2,r_1]} = nZ_{r_{k-1}}n \ldots nZ_{r_2}nZ_{r_1}n\ .$$

Mais uma vez, aplicando o princípio de indução matemática em k, mostra-se que:

Lema 3.3. *Seja* n *um número com* $t \geq 1$ *algarismos. Então o número* $n_{[k,r_{k-1},\ldots,r_1]}$ *é escrito na forma*

$$n_{[k,r_{k-1},\dots,r_1]} = n\times 10^{(k-1)t+(r_{k-1}+\cdots+r_2+r_1)} + \dots$$
$$+ n\times 10^{2t+r_2+r_1} + n\times 10^{t+r_1} + n\ .$$

Claramente o lema 3.1 é uma especificação do lema 3.3 quando $r_1 = r_2 = \ldots = r_{k-1} = 1$.

Exemplo 3.4. *Os números $n = 10989$ e $n' = 98901$ são permúltiplos com cinco algarismos e $9 \cdot n = n'$. Assim,*

$$10989_{[2,3]} = 1098900010989 = 10989 \times 10^8 + 10989.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} 10989_{[3,4,5]} &= 10989000010989000000010989 \\ &= 10989 \times 10^{19} + 10989 \times 10^{10} + 10989\ . \end{aligned}$$

Assim

$$9 \cdot 10989_{[2,3]} = 9(10989 \times 10^8 + 10989) = 98901_{[2,3]}\ ,$$

como também

$$\begin{aligned} 9 \cdot 10989_{[3,4,5]} &= 9 \cdot (10989 \times 10^{19} + 10989 \times 10^{10} + 10989) \\ &= 98901_{[3,4,5]}. \end{aligned}$$

Os exemplos 3.2 e 3.4 podem ser generalizados pelo seguinte resultado.

Teorema 3.5. *Sejam n e $n' = s \cdot n$ números permúltiplos com $t \geq 1$ algarismos. Então os números $n_{[k,r_1,\dots,r_{k-1}]}$ e $n'_{[k,r_1,\dots,r_{k-1}]}$ também são permúltiplos para todo o $k \geq 1$.*

Demonstração. Para $k = 2$ temos que

$$n_{[2,r_1]} = nZ_{r_1}n = n \times 10^{t+r_1} + n'$$

assim.

$$\begin{aligned} s \cdot n_{[2,r_1]} &= s(n \times 10^{t+r_1} + n) \\ &= s \cdot n \times 10^{t+r_1} + s \cdot n \\ &= n' \times 10^{t+r_1} + n' \\ &= n'_{[2,r_1]}\ , \end{aligned}$$

e obtemos o resultado.

Admitindo que é válido o resultado para algum $k \geq 2$, mostraremos que o resultado também é válido para $k+1$. Vejamos que

$$n_{[k+1,r_k,r_{k-1},\dots,r_1]} \overset{Lem\,3.3}{=} n \times 10^{kt+(r_k+r_{k-1}+\cdots+r_2+r_1)} + n_{[k,r_1,\dots,r_{k-1}]}\ .$$

Assim,

$$\begin{aligned} s \cdot n_{[k+1,r_k,r_{k-1},\dots,r_1]} &= s(n \times 10^{kt+(r_k+r_{k-1}+\cdots+r_2+r_1)} + n_{[k,r_1,\dots,r_{k-1}]}) \\ &= s \cdot n \times 10^{kt+(r_k+r_{k-1}+\cdots+r_2+r_1)} + s \cdot n_{[k,r_1,\dots,r_{k-1}]} \\ &\overset{hip\_ind}{=} n' \times 10^{kt+(r_k+r_{k-1}+\cdots+r_2+r_1)} + n'_{[k,r_1,\dots,r_{k-1}]} \\ &= n'_{[k+1,r_k,r_{k-1},\dots,r_1]}\ . \end{aligned}$$

□

4. LISTAGEM DE NÚMEROS PERMÚLTIPLOS

Nesta secção vamos apresentar um pequeno apontamento acerca dos números permúltiplos sem concatenação, na verdade um apanhado de vários resultados envolvendo estes números sem uma preocupação com a justificação de tais factos. Também faremos na tabela 1 uma catalogação de trabalhos, ou bancos de questões, em que apareceram números permúltiplos, sem que tal signifique uma primazia ou originalidade.

Ball [1] observa, sem justificar ou conceituar, que $9801 = 9 \cdot 1089$.

Barros [2] mostra a relação entre os números 102564 e 410256, verificando que $410256 = 4 \cdot 102564$. Apresenta ainda a seguinte questão: dado um número inteiro positivo n com k algarismos, se transladarmos o algarismo da unidade para a posição de maior ordem (primeira posição à esquerda), que condições devemos estabelecer para que o número n' seja múltiplo de n? Carvalho e Costa [5] apresentam um estudo da questão proposta em [2], exibindo os números permúltiplos da forma $n = 9b\frac{R_k}{d}$, sendo $R_k = 11\cdots 11$ uma *repunidade*, $b \in \{2,3,\dots,9\}$ e $d \in \{19,29,39,49,59,69,79,89\}$ um divisor de R_k. Por exemplo, para $b = 3$, obtém-se o número primo $d = 29$. Como 29 divide R_{28}, tem-se

$$\begin{aligned} n &= \frac{27 \times R_{28}}{29} = 1034482758620689655172413793, \\ n_1 &= 3103448275862068965517241379 = 3 \times N. \end{aligned}$$

Gardner [10] e Moreira [13] exibem números que possuem a propriedade de ser múltiplos de um número inicial fixo, e todos os números são obtidos pela permutação cíclica dos algarismos daquele número inicial. Enquanto Gardner [10] o faz de uma forma mais lúdica ou por curiosidade aritmética, Moreira [13] justifica a conexão com os restos na divisão euclidiana por um número primo p, com foco na preparação de estudantes para competições olímpicas em matemática. Neste último, ressaltamos que alguns números são permúltiplos admitindo o algarismo inicial 0.

Como dissemos, Holt [11, 12] cunha o termo permúltiplo, bem como exibe exemplos e apresenta propriedades acerca de alguns destes números na base 10 e noutras bases.

Webster e Williams [16] “catalogam” uma subclasse dos permúltiplos, os divisores reversos, um inteiro que é divisor do seu número reverso (o número obtido pela inversão da posição dos seus algarismos, assim o reverso de 23 é 32). Por exemplo, os permúltiplos 1089 e 9801 são divisores reversos. Para $n \geq 3$, mostram que todos os divisores reversos são do tipo $11(10^{n-2} - 1)$ (tipo I), $2 \cdot 11(10^{n-2} - 1)$ (tipo II), e concatenação de números do tipo I. Por exemplo, 1089 e 10989, e os seus respetivos reversos, são do tipo I, enquanto $2178 = 2 \cdot 1089$ e $21978 = 2 \cdot 10989$, e os seus respetivos reversos, são do tipo II. Conclui-se ainda deste trabalho que há divisores reversos (permúltiplos) com qualquer quantidade k de algarismos, para $k \geq 4$.

Por fim, Costa e Santos [8] mostram que os números do tipo I, apresentados por Webster e Williams [16], são números mágicos de Ball (resultado de um algoritmo que aparece em Ball [1], sendo 1089 um exemplo). Por conseguinte, os números do tipo II são o dobro de um número de Ball.

Na tabela 1, apresentamos alguns números permúltiplos sem concatenação, e o(s) trabalho(s) que estes números apareceram e podem ser consultados.

5. CONSIDERAÇÕES

Esperamos que este trabalho desperte a curiosidade sobre esta interessante classe de números inteiros.

Na forma de desafio ou com foco em competições matemáticas, pode propor-se um problema similar a estudantes. Por exemplo, dado um número n com k algarismos, qual a condição ou as condições, para que o número n', formado por uma permutação dos algarismos de n, seja um múltiplo de n? Esta foi a motivação inicial da nossa pesquisa.

Pensando nesta situação-problema e aplicando as técnicas e os procedimentos vistos em [2, 5, 8, 11], obtemos três pares de números permúltiplos (sem concatenação):

$$7 \cdot 1014492753623188405797 = 7101449275362318840579$$
$$8 \cdot 1012658227848 = 8101265822784$$

e

$$9 \cdot 1011235955056179775280898876404494382022471 9$$

Sendo este o objeto de pesquisa do trabalho de conclusão de curso (em preparação) da segunda autora e que poderá ser explorado num trabalho futuro.

Agradecimento

O primeiro autor agradece à PROPESQ/UFT pelo apoio à pesquisa.

REFERÊNCIAS

[1] Ball, Walter W. R. *Mathematical Recreations and Essays*. Macmillan, 1914.

[2] Barros, Augusto M. A. “Qual a Relação que Existe Entre os Números 102564 e 410256?”. *Revista do Professor de Matemática* SBM, Vol. 63, p.22-23, 2007.

[3] BRASIL-OBMEP. *Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas*. Prova 2022. SBM : IMPA. *www.obmep.org.br*

[4] Carvalho, Fernando S.; Costa, Eudes A. “Permutando Algarismos dos Números”. *Eureka!*, SBM, n. 39; 27-36, 2015.

[5] Carvalho, Fernando S.; Costa, Eudes A. “Números Permúltiplos”. *Revista do Professor de Matemática*, SBM, n. 106, 49-52, 2022.

[6] Costa, Eudes A.; Santos; Bruno C. “Número Equilibrado Aritmético ou Geométrico”. *Revista de Matemática da UFOP*, n.3, vol 03, 64-74, 2022.

[7] Costa, Eudes A.; Santos, Douglas C. "Algumas Propriedades dos Números Monodígitos e Repunidades”. *Revista de Matemática da UFOP*, vol.2, n.2022, p.47-58, 2022.

[8] Costa, Eudes A.; Santos, Ronaldo A. “Reverse Divisors and Magic Numbers”. *arXiv preprint* arXiv:2404.06656[math.NT], 2024.

[9] Costa, Eudes A.; Soares, Thalles S. “Soma Iterada de Algarismos de um Número Concatenado”. *Revista de Matemática da UFOP*, v. 1, n.2024, p.e1-e11, 2024.

[10] Gardner, Martin. *Mathematical Circus*. American Mathematical Society, 1996.

Tabela 1. Números permúltiplos sem concatenação

m	x	$x' = m \cdot x$	Referência
9	1089	9801	[1, 1914], [3, BQ 2014], [16, 2012]
9	10989	98901	[3, BQ 2014], [8, 2024], [11, 2014], [16, 2012]
4	2178	8712	[8, 2024], [16, 2012]
4	21978	87912	[3, BQ 2012], [5, 2022], [11, 2014]
4	219978	879912	[3, BQ 2013], [8, 2024], [16, 2012]
4	102564	410256	[2, 2007], [5, 2022]
2	142857	285714	[10, 1996], [11, 2014], [13, 1998]
3	142857	428571	[10, 1996], [11, 2014], [13, 1998]
4	142857	571428	[10, 1996], [11, 2014], [13, 1998]
5	142857	714285	[10, 1996], [11, 2014], [13, 1998]
6	142857	857142	[10, 1996], [11, 2014], [13, 1998]
2	0588235294117647	1176470588235294	[10, 1996], [11, 2014], [13, 1998]
3	0588235294117647	1764705882352941	[13]
4	0588235294117647	2352941176470588	[13]
5	0588235294117647	2941176470588235	[13]
6	0588235294117647	3529411764705882	[13]
7	0588235294117647	4117647058823529	[13]
8	0588235294117647	4705882352941176	[13]
9	0588235294117647	5294117647058823	[13]
10	0588235294117647	5882352941176470	[13]
11	0588235294117647	6470588235294117	[13]
12	0588235294117647	7058823529411764	[13]
13	0588235294117647	7647058823529411	[13]
14	0588235294117647	8235294117647058	[13]
15	0588235294117647	8823529411764705	[13]
16	0588235294117647	9411764705882352	[13]
2	105263157894736842	210526315789473684	[5, 2022]
3	10344827586206 89655172413793	31034482758620 68965517241379	[5]
5	102040816326530612244 897959183673469387755	510204081632653061224 489795918367346938775	[5]
6	1016949152542372881355 9322033898305084745762 71186440677966	6101694915254237288135 5932203389830508474576 27118644067796	[5]

[11] Holt, Benjamim V. "Some General Results and Open Questions on Palintiple Numbers". *Integers*, v. 14, p. A42, 2014.

[12] Holt, Benjamin V. "On Permutiples Having a Fixed Set of Digits". *arXiv preprint*, *arXiv:1511.02033v2 [math.NT]*, 2015.

[13] Moreira, Carlos G. T. de A. "Números Mágicos e Contas de Dividir". *Eureka-SBM*, 1, p.38-40, 1998.

[14] Niven, I.; Zuckerman, H. S. "An Introduction to the Theory of Numbers". *Bull. Amer. Math. Society*, v. 67, p. 339-340, 1961.

[15] Sloane, N. J. A. "2178 and All That". *Fibonacci Quart.* 52, no. 2, p. 99–120, 2014.

[16] Webster, Roger; Williams, Gareth. "On the Trail of Reverse Divisors: 1089 and All That Follow". *Mathematical Spectrum*, n.45, p. 96-102, 2012.

SOBRE OS AUTORES

Eudes Antonio Costa (*https://orcid.org/0000-0001-6684-9961*) é professor adjunto no colegiado de Matemática da Universidade Federal do Tocantins, Arraias, Brasil. Os seus interesses de investigação prendem-se com tópicos de álgebra, teoria dos números, ensino de matemática e matemática recreativa.

Jaqueline Ribeiro Dias é académica do curso Licenciatura em Matemática no Campus de Arraias, Universidade Federal do Tocantins, Brasil.