por Pedro Quaresma [Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra]
Elsa Lopes [Núcleo de Estágio Pedagógico, Lic. Matemática, F.C.T.U.C., Escola B. 2, 3 c/ Sec. José Falcão, Miranda do Corvo]

# Criptografia

Saiba como transmitir informação de forma segura: dos sistemas de chave secreta usados na antiguidade aos actuais sistemas de chave pública.

## 1 Introdução

A necessidade de proteger os canais de comunicação entre pessoas de uma mesma comunidade vem desde os primórdios da civilização. A ideia de não só proteger os meios de comunicação mas também proteger o próprio conteúdo da mensagem através da cifração é também muito antiga. O imperador romano Júlio César (100 - 44 a.C ) desenvolveu uma cifra simples para poder comunicar com os seus generais: na mensagem original cada letra é *deslocada* três posições para a direita, considerando-se que o alfabeto se fecha sobre si próprio, isto é, que após a última letra vem a primeira; o receptor da mensagem só tem que *deslocar* cada letra três posições para a esquerda para obter a mensagem original.

A cifração de mensagens foi-se tornando um processo cada vez mais sofisticado, passando pelas máquinas Enigma [5] usadas pelo exército alemão aquando da Segunda Guerra Mundial, até aos nossos dias com as transacções electrónicas na Internet. Na actual *Sociedade da Informação*, em que cada vez mais as pessoas comunicam através da Internet, um meio de comunicação muito exposto, a importância da criptografia é enorme. Só através da cifração das comunicações é que podemos garantir a confidencialidade da informação que queremos transmitir.

## 2 O Surgimento da Criptografia

O surgimento da criptografia (do Grego: kryptós, oculto + graph, r. de graphein, escrever) deve ter sido quase que simultâneo com o da escrita [8]. Os Espartanos, em 400 a.C., desenvolveram um sistema muito curioso: enrolava-se uma tira de couro num bastão, onde se escrevia a mensagem. O acto de desenrolar a tira do bastão cifrava a mensagem, que só poderia ser decifrada tornando a enrolar a tira num bastão de diâmetro semelhante.

Em contraponto com este método puramente mecânico, a cifra de Júlio César implicava um algoritmo de cifração. Um sistema criptográfico é então um conjunto de técnicas que nos permitem tornar incompreensível uma dada mensagem, de modo que só o verdadeiro destinatário da mesma a consiga decifrar, obtendo dessa forma o texto original.

### 2.1 Sistemas Criptográficos Simétricos

Os primeiros sistemas criptográficos inventados eram do tipo *criptografia simétrica*, ou de *chave secreta*. Sistemas em que existe uma só *chave de cifração*, e em que os processos de cifração e de decifração são simétricos.

No caso do algoritmo de Júlio César estamos perante um algoritmo monoalfabético aditivo, isto é, no processo de cifração só é utilizado um alfabeto, e basta somar ou subtrair três ao código numérico de cada letra do alfabeto.

Qual será o significado da frase?

D FKDYH WHP GH VHU PDQWLGD VHFUHWD

Embora se possam desenvolver sistemas mais sofisticados [8], nomeadamente os métodos polialfabéticos multiplicativos, este tipo de sistema tem sempre dois problemas de base que limitam a sua capacidade de proteger a informação:

a chave de cifração tem de ser do conhecimento de toda a organização *amiga*, e tem de ser mantida secreta de todas as organizações inimigas. Quanto maior for a complexidade da organização *amiga* mais difícil será verificar esta condição;

a despeito de algoritmos mais sofisticados, o estudo das línguas naturais, a sua construção frásica, a frequência relativa das diferentes letras do alfabeto, entre outras características, permitem obter muita informação que pode depois ser usada para quebrar o código de cifração.

### 2.2 Sistemas Criptográficos Assimétricos

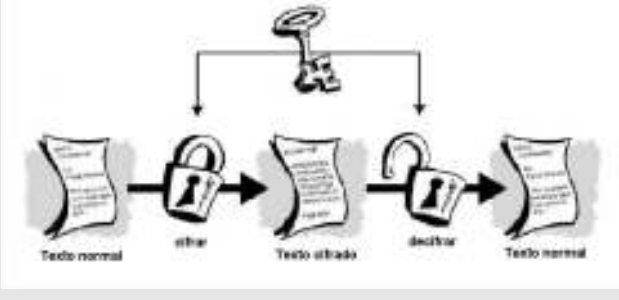
Surgem então em cena os sistemas de *criptografia assimétrica* ou de *chave pública*. Sistemas em que o processo de cifração usa uma *chave pública*, mas em que o processo de decifração usa uma chave diferente, dita *chave privada*.

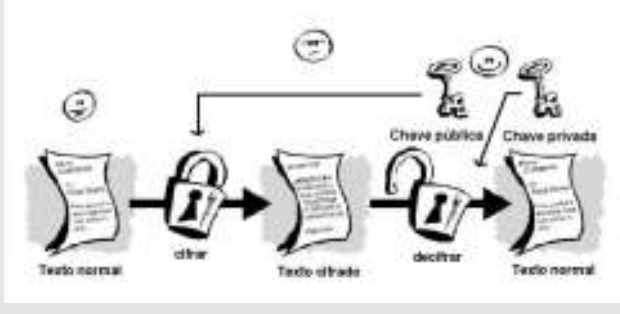
Este tipo de sistema resolve os dois problemas acima expostos:

a chave privada é do conhecimento de uma única entidade, o receptor da mensagem. Mantê-la secreta é assim muito mais fácil;

os algoritmos desenvolvidos são bastante mais complicados de quebrar do que os anteriores.

No que se segue, vamos descrever um dos algoritmos actualmente usados. Esperamos conseguir convencer o leitor da maior dificuldade existente em quebrar um código deste tipo quando em contraponto com os anteriores métodos. Queremos no entanto referir dois pontos: primeiro, as implementações apresentadas usam estruturas de dados simples, comummente encontradas nas linguagens de programação, o que leva a que não seja possível dificultar muito a tarefa do *inimigo*; por outro lado, no exemplo que iremos apresentar mais à frente, a cifração é feita carácter a carácter, o que não é o caso das implementações em uso na Internet, que usam blocos de caracteres como forma de evitar o estudo linguístico da mensagem cifrada.




Esta imagem e a seguinte (adaptadas) foram retiradas do texto (disponível na Internet) *Segurança da Informação: Estratégias para Neutralizar o Inimigo*, de **Francisco Gomes Milagres,** Universidade do Estado de Minas Gerais, Faculdade de Informática de Passos, 21 de Maio de 2003.

## 3. O Algoritmo RSA

Um sistema assimétrico muito usado na actualidade é o assim designado *sistema de criptografia RSA* [2, 3, 4, 6] que obtém o seu nome das iniciais dos seus três autores. Vamos de seguida descrevê-lo, apresentando uma das suas implementações desenvolvida no sistema de programação numérica *Octave*[1].

Num sistema de criptografia assimétrica é então necessário possuir programas para:

gerar as chaves públicas e privadas (secretas), $C_p$ e $C_s$;

cifrar as mensagens $A_{C_p} : M \longrightarrow A_{C_p}(M)$;

decifrar as mensagens $A_{C_s} : M \longrightarrow A_{C_s}(M)$;

Para que estejamos perante um sistema de criptografia e não perante um simples sistema de baralhação de mensagens, os programas de cifração e decifração têm de ser funções inversas, isto é, tem de se verificar que:

$$A_{C_s}(A_{C_p}(M)) = M \qquad A_{C_p}(A_{C_s}(M)) = M$$

O sistema RSA vai usar resultados conhecidos da Teoria dos Números para poder assegurar uma grande segurança no processo de decifração, não será de estranhar portanto que surja a necessidade de trabalhar com números primos.

### 3.1 Geração das Chaves

As chaves pública e privada vão ser constituídas, cada uma delas, por um par de números inteiros, os quais vão depois constituir o âmago dos processos de cifração e decifração.

Começa-se por escolher dois números primos $p$ e $q$, deles obtêm-se $n = pq$.

De seguida determina-se a função φ de Euler para $n$, $\varphi(n)$ dá-nos o número de naturais inferiores ou iguais a $n$ e que são primos com $n$. A função de Euler é uma função de inteiros em inteiros que, entre outras, tem as seguintes propriedades [2,3,4].

**Teorema 1** *Se m e n forem dois números naturais, primos entre si, tem-se* $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.

**Teorema 2** *Um número natural p é primo se e só se* $\varphi(p) = p - 1$

Temos então que $\varphi(n) = \varphi(p)\varphi(q) = (p-1)(q-1)$, ou seja, o cálculo de $\varphi(n)$ é, dado a escolha de $p$ e $q$, muito fácil de efectuar.

O próximo passo é o de escolher um natural $e$, tal que $1 < e < \varphi(n)$ e que seja primo relativo com $\varphi(n)$. O par $(e, n)$ é a chave pública do código RSA.

Para a determinação da chave privada do código RSA é necessário apresentar previamente o conceito de congruência módulo $n$.

**Definição 1 (Congruência módulo *n*)** Seja $n \in \mathbb{N}$ e $a, b \in \mathbb{Z}$, então *a e b dizem-se* congruentes módulo *n se tiverem o mesmo resto na divisão por n, denota-se tal facto por* $a \equiv b \pmod{n}$.

Decorre da definição que se $a \equiv b \pmod{n}$ então $a = b + kn$, para um dado $k \in \mathbb{Z}$.

Temos então que, para obter a chave privada da cifra RSA, começar por determinar um natural $d$ que seja o inverso multiplicativo de $e$, módulo $\varphi(n)$, ou seja, deve-se verificar a seguinte igualdade.

$$d\,e = 1 \pmod{\varphi(n)}$$

O par $(d, n)$ é a chave privada da cifra RSA.

A obtenção dos números primos $p$ e $q$ pode ser feita recorrendo a um dos muitos algoritmos para a obtenção de números primos, por exemplo o *Crivo de Eratóstenes* [7, pag. 278].

O algoritmo para a criação das chaves é o seguinte:

```
##Determinação das Chaves Pública e Privada:
##
## -> p,q dois números primos.
## <- (e,n) e (d,n), as chaves públicas e privadas.
function chaves(p, q)
  n = p*q;
  fi = (p-1)*(q-1);
  e = 2;
  k = 0;
  do
    e = e+1;
  until (gcd(fi,e) == 1)
  achou = false;
  while (!achou)
    d = (1 + (k * fi))/e;
    if ( d == round(d))
      achou = true;
    else
      k = k+1;
    endif
  endwhile
  printf("\n A chave pública é (%d,%d).\n", e, n);
  printf("\n A chave privada é (%d,%d).\n\n", d, n);
endfunction
```

[1] Octave, www.octave.org, é um sistema de programação numérica de distribuição gratuita, compatível com o *MatLab*.

Para os valores de $p = 11$ e $q = 23$ ter-se-ia:

octave > chaves (11,23).
A chave pública (3, 253).
A chave privada (147, 253).

O Algoritmo de cifração RSA é:

$$C = A_{C_p}(M) = M^e \pmod{n}$$

e o algoritmo de decifração é:

$$M = A_{C_s}(C) = C^d \pmod{n}$$

Nesta nossa implementação simplificada do algoritmo RSA, em Octave, tanto a função de cifração como a função de decifração lidam com inteiros. A mensagem é primeiro convertida de um vector de caracteres num vector de naturais, de seguida cifrada ou decifrada consoante os casos e, finalmente, convertida de novo num vector de caracteres[2].

```
##Cifrar a Mensagem Digital Original:
##
## -> (e,n), chave pública
##    m, mensagem a cifrar (vector de inteiros)
## <- x, mensagem cifrada (vector de inteiros)
function x=cifrar(e, n, m)
  t=columns(m);
  for i=1:t
    x(i) = mod((m(i))^e, n);
  endfor
endfunction

##Decifrar a Mensagem Cifrada:
##
## -> (d,n), chave pública
##    c, mensagem a decifrar (vector de inteiros)
## <- modl, mensagem decifrada (vector de inteiros)
function modl = decifrar(d, n, c)
  t=columns(c);
  for i=1:t
    modl(i) = 1;
    j=1;
    while (j <= d)
      modl(i) = mod((c(i))*modl(i), n);
      j = j+1;
    endwhile
  endfor
endfunction
```

### 3.2 Validação do Sistema RSA

Como já dissemos antes é necessário verificar se estamos perante um sistema de criptografia válido, isto é, temos que verificar que:

$$A_{C_s}(A_{C_p}(M)) = A_{C_p}(A_{C_s}(M)) = M^{ed} \pmod{n} = M$$

Para o desenvolvimento da demonstração são necessários alguns resultados auxiliares [2, 3, 4].

**Teorema 3 (Pequeno Teorema de Fermat)** *Se $n$ é um número primo, então $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$, para todo o $a \in Z$ tal que mdc $(a, n)$=1*

**Teorema 4 (Teorema chinês dos restos)**
*Sejam $m_1, m_2, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ primos dois a dois e $a_1, a_2, \ldots, a_k \in Z$. O sistema:*

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ \vdots \\ x \equiv a_k \pmod{m_k} \end{cases}$$

Tem uma solução simultânea $x$ para todas as congruências, e cada duas soluções são congruentes módulos $m = m_1 m_2 \ldots m_k$ .

**Teorema 5 (Sistema de Criptografia RSA)** *Sendo (e,n) e (d,n) as chaves pública e privada respectivamente do sistema de criptografia RSA verifica-se então que*:

$$(m^e)^d \pmod{n} = m$$

*para qualquer inteiro m, com* $0 \le m < n$

**Demonstração**
Da definição de $e$ e $d$ tira-se que $ed \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$ existe então um $k \in Z$ tal que $ed = 1 + k\varphi(n)$, ou seja:
$ed = 1 + k(p-1)(q-1)$ , $k \in Z$
donde:

$$(m^e)^d = m^{ed} = m^{1+k(p-1)(q-1)} = mm^{(p-1)(q-1)k}$$

segue-se que:

$$(m^e)^d \equiv m(m^{(p-1)})^{(q-1)k} \equiv m \pmod{p}$$

Se $p$ não é um divisor de $m$ esta congruência é uma consequência do Pequeno Teorema de Fermat. Caso contrário a asserção é trivial dado que ambos os membros da equação são congruentes com 0 mod $p$.
De forma análoga ter-se-ia que:

$$(m^e)^d \equiv m \pmod{q}$$

Dado que $p$ e $q$ são números primos distintos podemos aplicar o Teorema chinês dos restos, e dado que se assume que $0 \le m < n$, obtém-se

$$(m^e)^d \equiv m \pmod{pq} \equiv m \pmod{n} = m$$

q.e.d.

[2] O programa Octave contendo todas as funções referidas no texto pode ser obtido em http://www.mat.uc.pt/~pedro/cientificos/Cripto/

### 3.3 Como «Quebrar» o Código RSA

Por quebrar um código entende-se o acto de conseguir decifrar a mensagem sem que se tenha um prévio conhecimento da chave secreta. Para quebrar o código RSA basta descobrir o $d$, que poderá ser obtido de $e$, de $p$ e de $q$. O $e$ pertence à chave pública, o $p$, e o $q$ são factores primos de $n$, que é o outro elemento da chave pública. Ou seja, para quebrar um sistema deste tipo basta factorizar $n$.
O problema reside então na factorização em números primos de um dado número natural $n$. Para valores de $n$ suficientemente grandes esta tarefa é impraticável, mas isso é tema para um outro artigo, até lá deixamos ao leitor da *Gazeta de Matemática* algumas pistas [1, 2, 3, 4] e um pequeno desafio.

```
359394 185904 0 231105 382481 474195 382481 10935 75745 382481
185904 0 201637 382481 302441 522545 270765 382481 185904 0 185904
382481 265174 79985 0 365807 292080 66056 261188 75745 382481 371293
60839 185904 185904 265174 185904 0 90175 75745 75745 382481 185904
270765 522545 10935 66056 474195
```

Sabendo que se usaram os algoritmos descritos acima, com uma cifração letra a letra (caracteres *ASCII* entre ' ' e '~' que correspondem a, ' ' =0, '!'=1, ...) e a nossa chave pública é (5,561971).

Sistema com encriptação RSA.

Máquina Enigma.

### Referências


[1] **D. Atkins, M. Graff, A. Lenstra, e P. Leyland**. The magic words are squeamish ossifrage. In *ASIACRYPT 1994*, pages 263–277, 1994.

[2] **Douglas R. Stinson**, *Cryptography, Theory and Practice*, 3rd Ed., Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2006.

[3] **Johannes Buchmann**. *Introduction to Cryptography*. Springer-Verlag, New York, 2000.

[4] **Neal Koblitz**, *A Course in Number Theory and Cryptography*, 2nd Ed., Springer, New York, 1994.

[5] **António Machiavelo**. *O que vem à rede... Gazeta de Matemática*, (147): 14-15, Julho 2004.

[6] **R. Rivest, A. Shamir, e L. Adleman**. *A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems. Communications of the ACM*, 21(2): 120-126, 1978.

[7] **Pimenta Rodrigues, Pedro Pereira, e Manuela Sousa**. *Programação em C++*. FCA Editora de Informática Lda, 2ª edição, 1998.

[8] **Richard Spillman**. *Classical and Contemporary Cryptology*. Prentice-Hall, 2005.