por **Fabio Chalub**
[Universidade Nova de Lisboa]

O Atlas da Matemática

Um computador pode ajudar a compreendermos a matemática? A classificação do grupo de Lie simples $E(8)$ mostra que sim! Mas para chegar a esta conclusão foi necessário o desenvolvimento de novos algoritmos para resolver um problema antigo. Conheça um pouco desta história.

Atlas é o nome de um dos Titãs, que ao perder a batalha contra os deuses do Olímpio foi condenado pelo próprio Zeus a carregar os céus sobre os seus ombros. Isto deu-lhe tanto conhecimento sobre a Terra que o seu nome hoje é mais associado às artes da Cartografia (ou seja, do desenho de mapas) do que à própria deidade grega.

Em matemática, a palavra atlas também tem o seu significado. Afinal, as estruturas geométricas são compreendidas a partir de "cartas", pequenos mapas que fazem corresponder a estrutura euclidiana aos espaços não euclidianos. O conjunto destas cartas constitui um atlas, que descreve completamente as superfícies, ou de forma mais geral, as "variedades riemannianas".

Portanto, quando um grupo de matemáticos resolveu mapear todos os grupos de Lie simples, não foi nenhuma surpresa chamar ao projecto "Atlas dos grupos de Lie e de suas representações"[1]. Mas o que é isto?

Um grupo é um conjunto de elementos com uma operação (chamada "produto") tal que, dados dois elementos, o seu produto esteja no conjunto e exista um elemento ("identidade") cujo produto com qualquer outro elemento dê como resultado o outro elemento. Além disto esta operação é associativa (ou seja, podemos colocar parêntesis em qualquer lugar, de forma indistinta) e para cada elemento existe um "inverso", ou seja, alguém que multiplicado pelo elemento original tem como resultado a identidade.

[1]http://www.liegroups.org

Estas quatro hipóteses são chamadas "axiomas de grupo". Alguns exemplos de grupo são os números naturais (ou racionais, ou reais) com a operação de soma; os números reais, excepto o zero, com a multiplicação; ou ainda as matrizes invertíveis com a multiplicação. Veja que aquilo a que chamamos "produto" no parágrafo acima pode ser qualquer operação matemática que transforme dois elementos num único, e que tem que ser dita explicitamente sempre que queremos definir um grupo.

Para termos um grupo de Lie (em homenagem ao matemático Norueguês do século XIX, Sophus Lie)

Sophus Lie.

devemos além disto considerar que estas operações são contínuas (ou seja, pequenas variações dos elementos de quem tomamos o produto terão um pequeno efeito no resultado da operação; o mesmo para a inversão). Um grupo de Lie é um objecto matemático, em geral fácil de ser estudado. Isto decorre pelo facto de estes (bom, pelo menos os "conexos", mas não entraremos neste detalhe) serem totalmente determinados pela sua álgebra de Lie.

Uma álgebra é um objecto muito mais simples do que um grupo pois tem muito mais operações permitidas. Mais exactamente, uma álgebra é um conjunto com duas operações que normalmente chamamos de "soma" e "multiplicação", pois são muito similares à soma e multiplicação usuais das matrizes. Aliás, as matrizes são o melhor exemplo das álgebras de Lie. Portanto basta estudarmos as matrizes para bem compreendermos os grupos de Lie.

E assim foi feito. Em 1887, Wilhelm Killing, um matemático alemão, completou a classificação dos grupos de Lie simples (um grupo é simples quando não possui subgrupos de um tipo chamado "normal"). Encontrou quatro famílias infinitas, chamadas grupos de Lie clássicos: *A(n)*, as matrizes complexas n por n de determinante 1; *B(n)*, as matrizes reais $2n+1$ por $2n+1$ com determinante 1; *C(n)* as matrizes quaterniónicas n por n que preservam o produto interno simpléctico e *D(n)* as matrizes reais $2n$ por $2n$ com determinante 1. Com a excepção do grupo *C(n)*, todos os outros exemplos aparecem no dia-a-dia. No entanto, o caso *C(n)* é tratado da mesma forma que todos os outros. Apenas não é um objecto ao qual estejamos habituados.

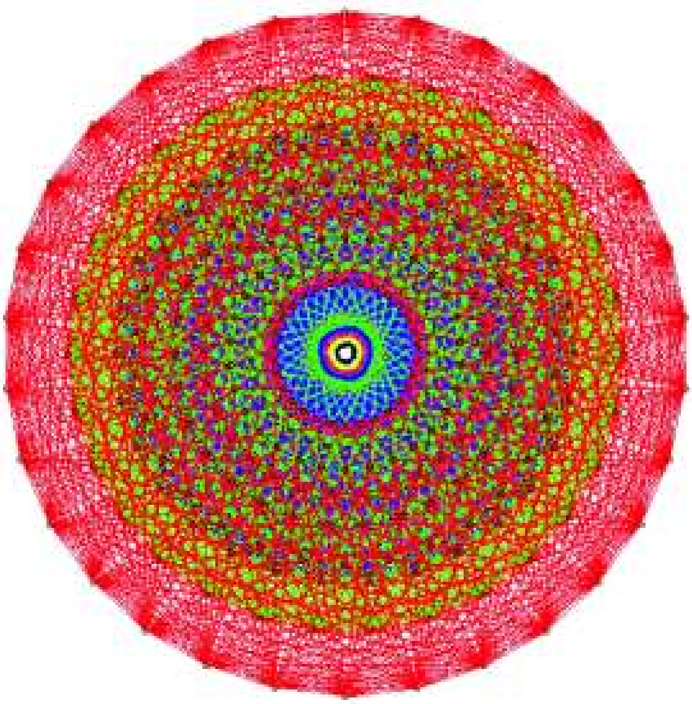
Killing também encontrou alguns exemplos que não encaixavam nesta classificação. São os chamados grupos de Lie excepcionais, *G(2)*, *F(4)*, *E(6)*, *E(7)* e *E(8)*. Apesar do nome, não há nada de realmente excepcional nestes. Apenas a classificação usual (que leva em consideração as simetrias do espaço euclidiano) coloca-os à parte, sem formar toda uma família de dimensões crescentes. No entanto, nada há de diferente entre estes e qualquer um daqueles do parágrafo anterior tomados isoladamente.

Como cada um destes grupos é determinado por uma álgebra e dado que uma álgebra é um objecto simples, então é possível compreendê-los (mesmos os excepcionais) a partir do estudo de matrizes. Aliás, de um número finito de matrizes (para cada caso). Estas matrizes, por sua vez, são obtidas a partir de um polinómio. Desta forma o objectivo do projecto Atlas é obter o polinómio mais simples possível que permita compreender cada grupo de Lie.

Finalmente, a 8 de Janeiro de 2007, o grupo Atlas, usando computadores, obteve o polinómio de grau 22 que caracteriza o grupo *E(8)*.

Mas porquê isto tudo? Os grupos de Lie sempre tiveram muitas aplicações, sobretudo em Física. O grupo de Heisenberg da mecânica quântica, assim como os grupos de Lorentz e Poincaré da relatividade são exemplos de grupos de Lie. E para quem tem conhecimentos de mecânica clássica não é difícil ver a importância dos grupos clássicos obtidos acima. Mesmo os grupos excepcionais têm importância crescente na física teórica (sobretudo partículas e altas energias).

Uma visão mais técnica do projecto Atlas, não contemplando todos os níveis de detalhe, pode ser obtida na referência[2]. M



Representação do grupo *E(8)*, projectado de 8 para 2 dimensões.
Imagem de John Stembridge, baseada num desenho de Peter McMullen.

[2]David Vogan, "The Character Table for *E8*", *Notices of the Amer. Math. Soc.* volume 54(9), p 1022-1034 (2007).