por António Machiavelo
[Departamento de Matemática Pura da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto]

# Celebrando Euler

Na sua adolescência, Leonhard Euler desfrutou de condições excepcionais. As influências do pai, do tutor e do grande matemático Johan Bernoulli foram fundamentais para que se tornasse um dos maiores matemáticos de sempre.

No ano que há pouco terminou, celebrou-se o tricentésimo aniversário de um dos mais fecundos e criativos matemáticos de todos os tempos: Leonardo Euler (1707-1783). A quantidade e diversidade absolutamente espantosa de trabalhos que escreveu, ultrapassando os 850 artigos e mais de uma vintena de livros, fazem de Euler um dos mais produtivos matemáticos de todos os tempos. De tal modo que a edição da sua obra completa não tem sido tarefa fácil. Foi iniciada em 1907 e, resultado de várias vicissitudes e da complexidade do trabalho, ainda não foi terminada! Duas das pessoas actualmente envolvidas nessa tarefa, Andreas Kleinert e Martin Mattmüller, relatam a história desse esforço hercúleo, os actuais obstáculos e o que esperar num futuro próximo, no artigo "Leonhardi Euleri Opera Omnia: a centenary project", publicado na Newsletter da EMS (European Mathematical Society) de Setembro de 2007, e disponível em: *http://www.ems-ph.org/newsletter/news.php* e também em: *www.euler-2007.ch/doc/EMS70965.pdf.*

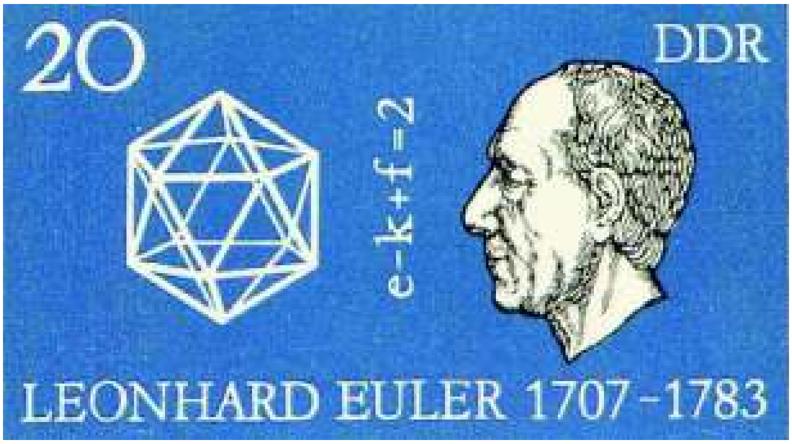
É muito fácil encontrar biografias de Euler na Internet, embora nem todas, obviamente, tenham a mesma qualidade. Em 2006, a editora Birkhäuser publicou uma tradução inglesa da excelente biografia *Leonhard Euler*, originalmente escrita em alemão em 1995, da autoria de Emil Fellmann, historiador de ciência. O primeiro capítulo pode ser encontrado na Internet, em[1]: *http://www.springerlink.com/content/t22713u184507u6p/* e inclui, logo no início, uma autobiografia (necessariamente incompleta) que Euler ditou, a 1 de Dezembro de 1767, a um dos seus filhos. É uma biografia cuidada, das poucas que deixa claro que o facto deste ter entrado para a universidade com 13 anos não tem nada de extraordinário em si mesmo, sendo o habitual da época (para quem tinha essa sorte). Fica também clara a influência do pai, que teve aulas com o grande matemático Jacob Bernoulli nos seus anos de universidade, antes de se dedicar à teologia; de Johannes

Leonhard Euler aos 71 anos, pintado pelo dinamarquês nascido na Alemanha Joseph Friedrich August Darbes (1747 – 1810).

[1]Que possivelmente pode apenas ser acedido numa universidade com acesso especial à base de dados SpringerLink.

Burckhardt, um tutor privado que o pai contratou para ensinar o jovem Euler, e que era um entusiasta da matemática; assim como o papel crucial de Johann Bernoulli na educação matemática deste. Sem dúvida um conjunto de condições excepcionais de que Euler soube tirar todo o proveito.

A Mathematical Association of America tem há já algum tempo uma rubrica intitulada "How Euler Did It", da autoria de Ed Sandifer, da Western Connecticut State University, onde, como o título indica, são expostos alguns dos resultados de Euler e o modo como este os obteve. São artigos bem interessantes e estão disponíveis em: *http://www.maa.org/news/howeulerdidit.html*




Selo comemorativo dos 200 anos da morte de Leonhard Euler. República Democrática da Alemanha, 1983.

De entre os muitos resultados de Euler (qualquer tentativa de sumariar as contribuições de Euler necessitaria de muitas páginas), limito-me aqui a apresentar um dos meus favoritos. É sem dúvida um dos seus resultados mais curiosos, e demonstra bem a criatividade e o domínio magistral sobre somas e produtos formais infinitos do seu autor. Trata-se do resultado principal dos artigos[2] "Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres, par rapport à la somme de leurs diviseurs", publicado em 1747, "Observatio de summis divisorum" e "Demonstratio theorematis circa ordinem in summis divisorum observatum", ambos publicados em 1760. Nestes trabalhos, Euler expõe uma relação de recorrência que encontrou entre a sequência formada pelas somas dos divisores dos números naturais, cujos primeiros elementos são:

$$1, 3, 4, 7, 6, 12, 8, 15, 13, 18, 12, 28, 14, 24, 24, 31, 18, \ldots$$

Consegue o leitor discernir aqui algum padrão?... Bom, designando a soma de todos os divisores de $n$ por $\int n$, por exemplo $\int 10 = 1 + 2 + 5 + 10 = 18$, Euler mostra que:

$$\int n = \int (n-1) + \int (n-2) - \int (n-5) - \int (n-7) + \int (n-12) + \int (n-15) - \int (n-22) - \int (n-26), + \cdots$$

sendo $\int (n-k) = 0$ se $k > n$ e $\int (n-n) = n$, e onde a sequência dos números que nela aparecem,

$$1, 2, 5, 7, 2, 15, 22, 26, 35, 40, 51, 57, 70, 77, 92, 100, 117, 126, 145, 155, \ldots$$

é tal que, acrescentado um zero no início, a sequência das suas diferenças:

$$1, 1, 3, 2, 5, 3, 7, 4, 9, 5, 11, 6, 13, 7, 15, 8, 17, 9, 19, 10, \ldots$$

é formada alternando a sequência dos números ímpares com a dos números naturais.

Como é que Euler descobriu esta relação profunda? De um modo verdadeiramente genial! Por um lado, brincando com produtos infinitos Euler observou que se tem:

$$\begin{aligned}(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)\cdots &= \\ = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + \cdots.\end{aligned}$$

[2]Descoberta de uma lei extraordinária dos números, relativamente à soma dos seus divisores; Uma observação sobre a soma dos divisores; Demonstração de um teorema sobre a ordem observada nas somas dos divisores; os artigos E175, E243 e E244, respectivamente, do índice de Eneström, um inventário dos trabalhos de Euler feito no início do século XX pelo matemático sueco Gustav Eneström.

Por outro lado, Euler observa que a série (como expressão formal):

$$z = \int 1 \cdot x + \int 2 \cdot x^2 + \int 3 \cdot x^3 + \int 4 \cdot x^4 + \int 5 \cdot x^5 + \cdots$$

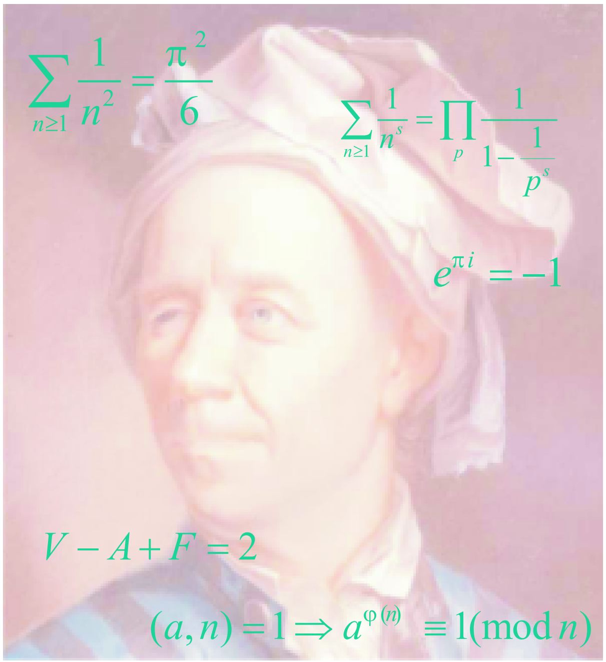
se pode escrever do seguinte modo:

$$\begin{aligned} z = {} & 1\left(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots\right) + 2\left(x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10} + \cdots\right) \\ & + 3\left(x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + x^{15} + \cdots\right) + 4\left(x^4 + x^8 + x^{12} + x^{16} + x^{20} + \cdots\right) \\ & + 5\left(x^5 + x^{10} + x^{15} + x^{20} + x^{25} + \cdots\right) + \cdots \end{aligned}$$

Soma então as séries geométricas entre parêntesis e executa a seguinte sequência de manipulações (para quem sabe o que os termos seguintes significam): primitiva, o que faz aparecer a função logaritmo; usando o facto de esta converter somas em produtos, observa que aparece o produto infinito atrás referido (talvez tenha sido isto que o levou a estudá-lo); usa o resultado que obteve para esse produto e deriva; uma multiplicação formal final com as expressões que obtém conduz ao resultado anunciado[3].

Para mais detalhes não há nada como seguir o preceito do famoso matemático norueguês Niels Abel (1802-1829), de "estudar os mestres, e não os seus alunos", e ler os originais. Uma tradução destes artigos do latim para a língua inglesa, assim como de vários outros, pode ser encontrada no *Euler Archive* em: *http://www.eulerarchive.org* e são ainda hoje, mais de dois séculos passados, fascinantes de ler! Polya, que dedica o capítulo VI do seu livro *Mathematics and Plausible Reasoning*[4] a este resultado de Euler, aí incluindo uma tradução para inglês do artigo E175, explica porquê: "[...] Euler parece-me quase único num aspecto: o seu esforço para apresentar cuidadosamente fundamentos indutivos relevantes, em detalhe e ordenadamente. Apresenta-a de um modo convincente mas honestamente, como um cientista genuíno o deve fazer. A sua apresentação é a «exposição honesta das ideias que o conduziram a essas descobertas» e tem um charme distinto".

No último parágrafo do artigo da Newsletter da EMS acima mencionado, é anunciado que o Comité Euler está presentemente a trabalhar num projecto que visa disponibilizar toda a obra de Euler na Internet. O *Euler Archive* contém já[5], digitalizados, 96.3% dos trabalhos publicados de Euler e traduções de 85 artigos. Não há melhor forma de celebrar este mestre intemporal! Esperemos que no presente século toda a obra deste impressionante e fértil trabalhador intelectual fique disponível na Internet, acessível a todos os que queiram penetrar no mundo fascinante deste notável matemático a quem Johann Bernoulli, que, diga-se, não era nada dado a elogios, se referiu como "de longe o mais astuto dos matemáticos" e "o incomparável Leonardo Euler, o príncipe entre os matemáticos". M




Alguns resultados descobertos por Euler, sobre um seu retrato feito por Emanuel Handmann.

[3] Para os entendidos, todas estas manipulações são justificáveis por o conjunto das séries formais com coeficientes racionais, Q[[x]], ter uma estrutura natural de anel topológico comutativo, com $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$, com operadores de diferenciação e primitivação que são contínuos. Obviamente, Euler não trabalha neste contexto, mas o que faz está absolutamente correcto!

[4] Princeton University Press, 1954.

[5] Em 7/11/2007.