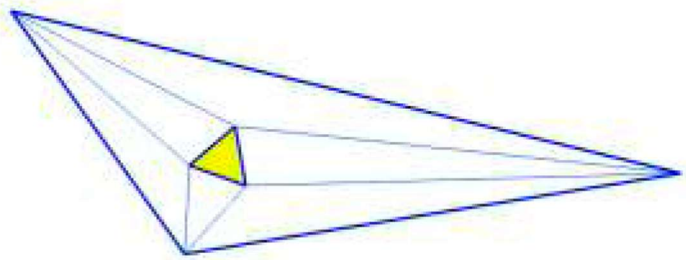
por **Mário Magalhães**
[Associação Atractor]

Versão do Teorema de Morley para Paralelogramos

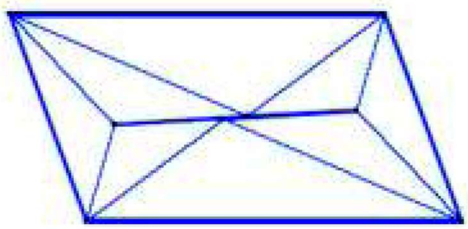
"One of the most surprising theorems in elementary geometry was discovered about 1899 by F. Morley. He mentioned it to his friends, who spread it over the world in the form of mathematical gossip."

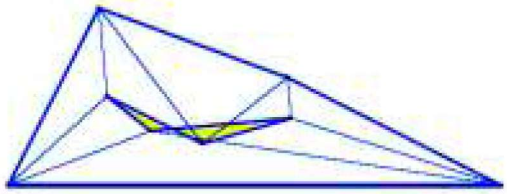
H.S.M. Coxeter

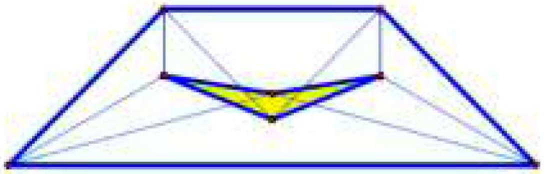
Consideremos um triângulo qualquer e as trissectrizes dos seus ângulos internos. Se construirmos os pontos de intersecção das trissectrizes adjacentes, então obteremos sempre os vértices de um triângulo equilátero, independentemente do triângulo inicial que considerarmos. Este é o Teorema de Morley. Para mais informações sobre este teorema, pode consultar a página **http://www.atractor.pt/mat/morley/**.



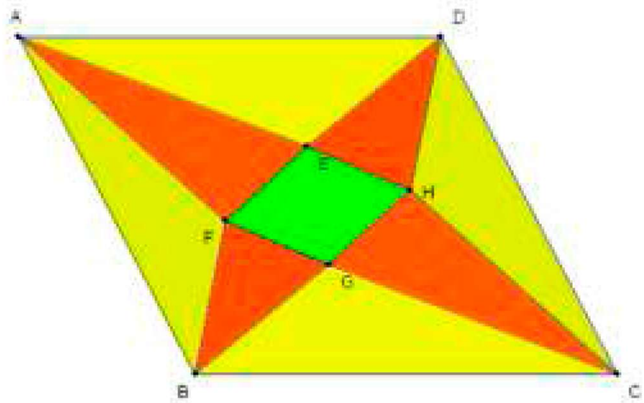
Neste artigo, veremos o que acontece se considerarmos paralelogramos em vez de triângulos. Construindo da mesma forma as intersecções das trissectrizes adjacentes dos ângulos internos de um quadrilátero, então obteremos quatro pontos. Unindo estes pontos consecutivamente, podem acontecer várias situações. Os pontos podem ser colineares ou podem formar um polígono não convexo, mesmo quando o quadrilátero inicial é convexo, como se pode ver nas seguintes figuras:





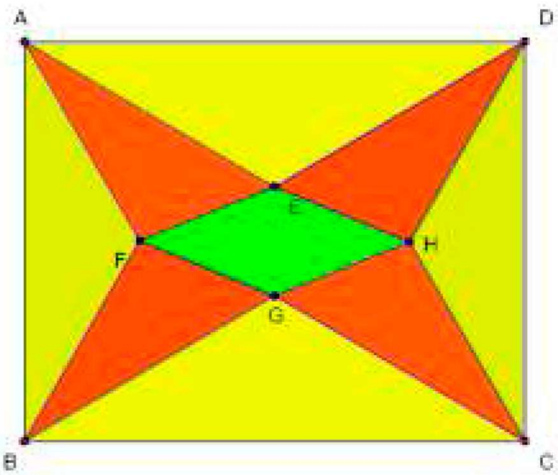


No entanto, se consideramos apenas paralelogramos, então só podem ocorrer duas situações: ou os quatro pontos são colineares[1] ou são vértices de um outro paralelogramo. Além disso, se partirmos de um rectângulo, obteremos sempre um losango, e, se partirmos de um losango, obteremos sempre um rectângulo. Segue-se uma prova destes factos, supondo à partida que os quatro pontos de intersecção das trissectrizes não são colineares.

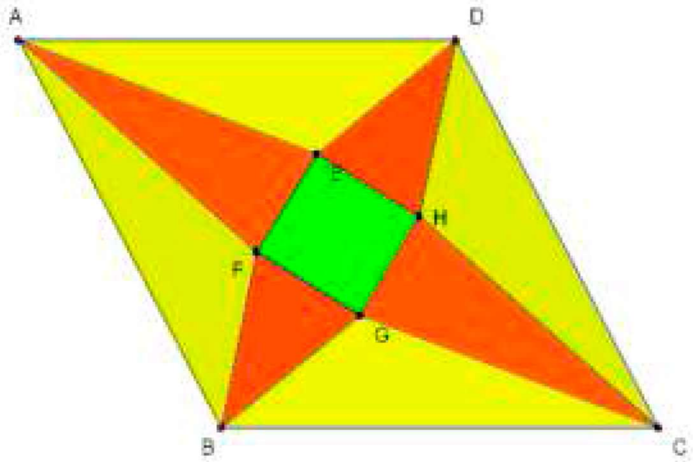


Construa o paralelogramo [$ABCD$], as suas trissectrizes e os pontos de intersecção das trissectrizes adjacentes, E, F, G e H. Una estes pontos consecutivamente, de modo a formar um quadrilátero. Como $A\hat{D}E = C\hat{B}G$, $D\hat{A}E = B\hat{C}G$ e $\overline{AD} = \overline{BC}$, temos que os triângulos [ADE] e [CBG] são congruentes, logo $\overline{AE} = \overline{CG}$ e $\overline{DE} = \overline{BG}$. Analogamente, como $A\hat{B}F = C\hat{D}H$, $B\hat{A}F = D\hat{C}H$ e $\overline{AB} = \overline{CD}$, temos que os triângulos [ABF] e [CDH] também são congruentes, logo $\overline{AF} = \overline{CH}$ e $\overline{BF} = \overline{DH}$. Como $E\hat{A}F = G\hat{C}H$, $\overline{AE} = \overline{CG}$ e $\overline{AF} = \overline{CH}$, temos que os triângulos [EAF] e [GCH] são congruentes, logo $\overline{EF} = \overline{GH}$. Analogamente, como $F\hat{B}G = H\hat{D}E$, $\overline{BF} = \overline{DH}$ e $\overline{BG} = \overline{DE}$, temos que os triângulos [FBG] e [HDE] também são congruentes, logo $\overline{FG} = \overline{HE}$. Portanto, o quadrilátero [$EFGH$] é um paralelogramo.

[1] Demonstra-se que tal acontece quando $a^2 + b^2 = \frac{4ab}{\sqrt{3}} \sin\frac{\pi + \alpha}{\sqrt{3}}$ onde a e b são as medidas dos lados do paralelogramo e α é a medida de um dos seus ângulos internos. Em particular, quando temos um losango (ou seja, quando $a = b$) os pontos nunca são colineares e quando temos um rectângulo (ou seja, quando $\alpha = \pi / 2$) os pontos são colineares quando $a = \sqrt{3}b$ ou $b = \sqrt{3}a$.



Se [$ABCD$] é um rectângulo, então todos os seus ângulos internos são rectos, pelo que são trissectados em ângulos de 30°. Temos então que [AED], [AFB], [BGC] e [CHD] são triângulos isósceles, pelo que $\overline{DE} = \overline{AE} = \overline{BG} = \overline{CG}$ (são lados de 2 triângulos isósceles congruentes) e $\overline{AF} = \overline{BF} = \overline{CH} = \overline{DH}$ (são também lados de 2 triângulos isósceles congruentes). Logo, como $E\hat{A}F = F\hat{B}G$, $\overline{AF} = \overline{BF}$ e $\overline{AE} = \overline{BG}$, temos que [$EAF$] e [$FBG$] são congruentes, pelo que $\overline{FE} = \overline{FG}$. Como [$EAF$] é congruente com [$GCH$], vem $\overline{FE} = \overline{HG}$ e, como [FBG] é congruente com [HDE], vem $\overline{FG} = \overline{HE}$. Portanto, os lados do paralelogramo [$EFGH$] são todos iguais, ou seja, [$EFGH$] é um losango.



Se $[ABCD]$ é um losango, então $\overline{AD} = \overline{AB}$ e, como $D\hat{A}E = F\hat{A}B$ e $A\hat{D}E = A\hat{B}F$, temos que $[ADE]$ e $[ABF]$ são congruentes, logo $\overline{AE} = \overline{AF}$. Como $[ADE]$ é congruente com $[CBG]$, temos que $[ABF]$ e $[CBG]$ também são congruentes, logo $\overline{BF} = \overline{BG}$. Portanto, os triângulos $[EAF]$ e $[FBG]$ são isósceles e, consequentemente, também os triângulos $[GCH]$ e $[HDE]$ são isósceles, dado que estes são congruentes com os anteriores. Temos então que $A\hat{E}D = A\hat{F}B = B\hat{G}C = C\hat{H}D$ (são ângulos de 4 triângulos congruentes), $A\hat{E}F = A\hat{F}E = C\hat{G}H = C\hat{H}G$ (são ângulos de 2 triângulos isósceles congruentes) e $B\hat{F}G = B\hat{G}F = D\hat{H}E = D\hat{E}H$ (são também ângulos de 2 triângulos isósceles congruentes). Logo, os ângulos internos do paralelogramo $[EFGH]$ são iguais, dado que as suas amplitudes podem ser obtidas subtraindo a 360° amplitudes de ângulos iguais (por exemplo, $E\hat{F}G = 360° - A\hat{F}E - A\hat{F}B - B\hat{F}G = 360° - C\hat{G}H - C\hat{G}B - B\hat{G}F = F\hat{G}H$). Além disso, a soma dos ângulos internos de qualquer quadrilátero é de 360°, logo todos os ângulos internos do paralelogramo $[EFGH]$ são rectos, ou seja, $[EFGH]$ é um rectângulo.

Obviamente, se juntarmos as duas hipóteses (todos os ângulos de $[ABCD]$ são rectos e todos os seus lados são iguais), isso significa que $[ABCD]$ é um quadrado, pelo que, neste caso, conclui-se que $[EFGH]$ também o é. Mais geralmente, partindo de um polígono regular de n lados, se construirmos os pontos de intersecção das suas trissectrizes adjacentes, então obteremos sempre os vértices de outro polígono regular de n lados.

Finalmente, ainda em relação ao caso geral dos paralelogramos, note-se que, em vez de escolher os pontos de intersecção das trissectrizes adjacentes, poderíamos ter escolhido os pontos de intersecção das trissectrizes não adjacentes de vértices consecutivos. Também aqui podemos concluir que estes pontos ou são colineares ou são os vértices de um outro paralelogramo, que é um losango no caso do paralelogramo inicial ser um rectângulo e vice-versa, sendo que a demonstração seria análoga à anterior. Na figura abaixo, temos representados estes dois paralelogramos, sendo que o primeiro, obtido pela intersecção das trissectrizes adjacentes, encontra-se a amarelo e o segundo encontra-se a cinzento.