por **Gustavo Granja**
[Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico]

O Grupo Fundamental

O grupo fundamental de um espaço é um dos conceitos mais importantes da Topologia — o ramo da Matemática que estuda a "forma". Permite, por exemplo, distinguir matematicamente entre a forma de uma superfície esférica e a forma da superfície de um toro.

O grupo fundamental de um espaço topológico é um invariante topológico introduzido por Henri Poincaré em 1895 num artigo que fundou a área da Matemática hoje chamada Topologia Algébrica [1].

Um espaço topológico é um conjunto munido de uma estrutura, chamada uma *topologia*, que formaliza a ideia intuitiva de vizinhança. Usando esta estrutura pode definir-se a noção de função contínua entre dois espaços topológicos, generalizando o conceito de função contínua real de variável real.

O grupo fundamental de um espaço X num ponto $p \in X$ é um conjunto $\pi_1(X,p)$ munido de uma operação. Os elementos são caminhos em X com início e fim em p, a que chamamos *laços* em p. Intuitivamente, um caminho é a trajectória descrita por uma partícula sobre X durante um certo intervalo de tempo. Formalmente, um laço em p é uma aplicação contínua $\alpha : [0,1] \to X$ com $\alpha(0) = \alpha(1) = p$.

Um aspecto fulcral é que não *distinguimos* entre caminhos que possam ser deformados continuamente um no outro em X mantendo as extremidades fixas em p. A Figura 1 descreve alguns elementos de $\pi_1(X;p)$ com X um plano perfurado por um pequeno círculo azul. O laço α pode ser deformado em X no laço constante em p que chamamos o *laço trivial*. O mesmo não sucede com β e γ (o buraco obstrui uma tal deformação). β também não pode ser deformado em γ pois os laços são percorridos em sentidos opostos.

Definimos uma operação $*$ em $\pi_1(X,p)$ justapondo os laços na ordem indicada. Formalmente,

$$(\beta * \gamma)(t) = \begin{cases} \beta(2t) & \text{se } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \gamma(2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

Na Figura 1, $\beta * \gamma$ pode ser deformado no laço trivial (o ponto correspondente ao fim de β e ao início de γ pode ser movido durante uma deformação). É fácil demonstrar que $*$ é uma operação associativa, com elemento neutro (o laço trivial) e que todos os laços têm um inverso (o laço em questão percorrido no sentido contrário). Estas propriedades da operação são abreviadas dizendo que $(\pi_1(X,p),*)$ é um grupo.

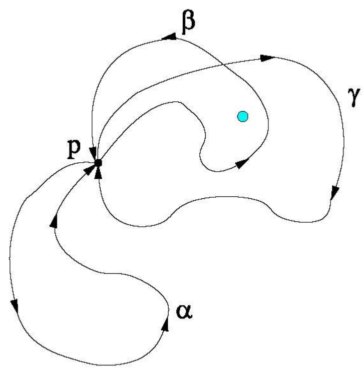

Figura 1: Um plano perfurado.

O grupo fundamental do espaço indicado na Figura 1 pode ser identificado com o grupo dos números inteiros $\mathbb{Z}$ com a operação de soma. A identificação atribui a um caminho o número de voltas que este dá ao buraco (contando a orientação).

A operação $*$ não é necessariamente comutativa. Considerando a Figura 2 vemos que $\alpha * \beta$ e $\beta * \alpha$ são elementos distintos do grupo fundamental de um plano duplamente perfurado.

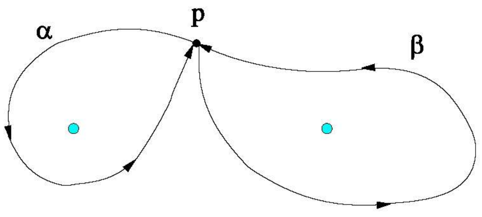

Figura 2: Um plano duplamente perfurado.

A Topologia é um ramo da Matemática que estuda a *forma* geral de um espaço sem atender a detalhes como por exemplo o "tamanho" (esse é o âmbito da Geometria). Dois espaços são considerados equivalentes se podem ser deformados continuamente um no outro "sem rasgar". Por exemplo, as superfícies de um *donut* e de uma chávena de café são equivalentes como espaços. Formalmente dizemos que dois espaços X e Y são *homeomorfos* se existe uma bijecção contínua $f: X \to Y$ com inversa contínua. Uma tal aplicação determina uma identificação dos grupos fundamentais de X e Y, o que se traduz dizendo que π_1 é um *invariante topológico*. Dois espaços que tenham grupos fundamentais diferentes não podem ser equivalentes. É isto que acontece com os espaços representados nas Figuras 1 e 2 (a operação é comutativa num grupo e não no outro).

Sob certas condições o grupo fundamental contém informação suficiente para determinar o espaço X. É isso que acontece no caso das superfícies (fechadas), uma das quais - o toro - é representada na Figura 3. Deixamos como exercício ao leitor escrever o laço β monstra-se que o grupo fundamental do toro se

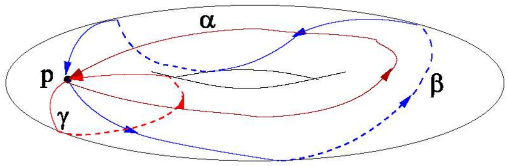

Figura 3: O toro.

em termos de α e γ usando a operação ∗. Demonstra-se que o grupo fundamental do toro se identifica com $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, o grupo formado pelos pares de inteiros com soma coordenada a coordenada. Uma identificação leva α em (1,0) e γ em (0,1) e nesse caso os inteiros correspondem ao número de voltas dado em torno de cada um dos "dois buracos" do toro.

Finalmente referimos que o grupo fundamental desempenha um papel crucial na classificação (ainda não terminada) das variedades de dimensão 3 (o análogo tridimensional das superfícies). Provavelmente o maior avanço recente em Matemática foi a demonstração por Perelman da conjectura de Poincaré - trabalho pelo qual lhe foi atribuída uma medalha Fields em 2006. Esta conjectura, feita por Poincaré em 1905, afirma que há uma única variedade de dimensão 3 (fechada) com grupo fundamental trivial, nomeadamente o conjunto dos vectores de comprimento 1 em $\mathbb{R}^4$.

Um exemplo de uma variedade de dimensão 3 é o espaço $SO(3)$ dos referenciais ortonormados em $\mathbb{R}^3$. Prova-se que o grupo fundamental deste espaço tem apenas dois elementos distintos. A Figura 4 contém uma representação do elemento não trivial de $\pi_1(SO(3))$ e do seu dobro (o leitor deve imaginar um referencial dentro de um carro em miniatura que percorre um dos lados do cinto). É divertido encontrar uma deformação do laço representado à direita no laço trivial. Recorde que é necessário manter a orientação das extremidades do cinto durante a deformação (isto corresponde a fixar o referencial no início e fim do caminho). M

Figura 4: O elemento não trivial do grupo fundamental do espaço dos referenciais em $\mathbb{R}^3$ e o seu dobro.

Referências

[1] **Poincaré, H.** (1985). "Analysis situs". *Journal de l'École Polytechnique*, 1, 1-123.

Bibliografia

Hatcher, A. (2002). *Algebraic topology*. Cambridge: Cambridge University Press. Disponível em http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html.