



por Paulo Jacinto Almeida [Escola Secundária D. Inês de Castro, Alcobaça]  
Adelaide Valente Freitas [Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro]

## Exemplo da Utilização do Excel na Abordagem do Conceito Frequencista de Probabilidade

A facilidade com que os jovens rapidamente dominam as novas tecnologias pode ser um instrumento de mais valia no esclarecimento de dúvidas e assimilação de novos conhecimentos. Uma proposta no âmbito do ensino das Probabilidades no 12º ano é aqui apresentada.

### 1. Introdução

O ensino das Probabilidades nos Ensinos Básico e Secundário recorre muito à intuição e à visualização dos conceitos. Actualmente, a interpretação frequencista de Probabilidade e a Lei dos Grandes Números (LGN) são afloradas no 9º ano e novamente abordadas no 12º ano de escolaridade. Estes assuntos são propícios à realização de actividades experimentais, que convidam ao espírito intuitivo e dedutivo.

Genericamente, no contexto da definição frequencista de Probabilidade, qualquer actividade a desenvolver impõe a realização de experiência repetidas num número elevado de vezes e sempre nas mesmas condições. Por isto, o computador, ou qualquer outro meio tecnológico, pode desempenhar um papel de suma importância nesse tipo de actividade, não descurando o propósito de esclarecer a interpretação frequencista da probabilidade distinguindo-a do chamado conceito clássico de Laplace.

É esperado<sup>1</sup> que um aluno do 12º ano identifique o valor a atribuir à probabilidade de um acontecimento

- recorrendo à regra de cálculo dada pela definição clássica de Laplace, se as condições do problema o permitirem; e/ou
- utilizando a definição frequencista de probabilidade, se condições houver que lhe permitam encontrar valores experimentais para a probabilidade.

O novo programa de Matemática do 12º ano propõe a realização de "experiências que permitam tirar partido de materiais lúdicos e de simulações". No primeiro período do ano lectivo de 2003/2004 foi dinamizada uma actividade sobre a definição frequencista de probabilidade e executada com o auxílio de aplicações concebidas em Excel. A actividade foi realizada por 112 alunos do 12º ano da Escola Secundária D. Inês de Castro (Alcobaça). Verificámos que a motivação, factor importantíssimo no ensino, é efectivamente maior quando se realizam tarefas envolvendo ferramentas informáticas. Avaliados os trabalhos constatámos que os resultados foram, na sua globalidade, bastante positivos. Houve motivação e aprendizagem. O facto de se ter recorrido aos computadores em plena aula permitiu a simulação de um grande número de experiências e o despertar nos jovens do gosto por aprender, ávidos que estão pelo uso das tecnologias informáticas.

<sup>1</sup>No 12º ano de escolaridade, os alunos ainda não têm conhecimentos suficientes para que se possa enunciar, formalmente, a LGN. Chama-se aqui a atenção que existem manuais de Matemática do 12º ano que "intitulam" a definição frequencista de probabilidade como sendo a LGN (de Bernoulli). Nos manuais do 9º ano a LGN é referida, genericamente, na forma: "para um grande número de experiências, a frequência relativa de um acontecimento é um valor aproximado da probabilidade desse acontecimento, pela LGN".

Com base na nossa experiência, na Secção 3 propomos uma actividade destinada a alunos do 12º ano de Matemática a ser executada com o auxílio de aplicações em Excel, as quais simulam o lançamento de dados equilibrados. Os comandos dessas aplicações em Excel são descritos na Secção 4. Antes, porém, começaremos na Secção 2 por lembrar a LGN, atribuída a Bernoulli, e a interpretação frequencista dada ao termo probabilidade de um acontecimento.

## 2. A Lei dos Grandes Números e o conceito frequencista de Probabilidade

Relativamente a uma experiência aleatória, seja  $p$  a probabilidade de um acontecimento  $A$  ocorrer numa realização da experiência. Por definição, o valor  $p$  é a imagem do acontecimento (conjunto)  $A$  por uma função (medida de probabilidade)  $P$ , ou seja,  $p=P(A)$ .

Para cada  $n$  provas independentes da experiência aleatória, consideremos a variável  $f_n(A)$  que representa a frequência relativa do acontecimento  $A$ , ou seja, o quociente entre o número de vezes que ocorre o acontecimento  $A$  e  $n$ .

A medida de probabilidade  $P$  satisfaz o seguinte resultado:

**Teorema** [Lei dos Grandes Números (de Bernoulli)]: Para qualquer  $\varepsilon > 0$  tem-se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|f_n(A) - p| < \varepsilon) = 1$$

Para cada  $n$  realizações de provas independentes da experiência, a concretização da variável aleatória  $f_n(A)$  representa a frequência relativa observada do acontecimento  $A$ . A LGN garante que, para um número  $n$  suficientemente elevado de realizações da experiência nas mesmas condições, a frequência relativa do acontecimento  $A$  diferirá muito pouco do valor  $p$  com uma probabilidade muito próxima de 1.

Mas como determinar o valor  $p$ ? Com base na LGN, a corrente frequencista sustenta a seguinte definição:

**Definição 1** [Definição frequencista de probabilidade]: Dada uma experiência aleatória e  $A$  um acontecimento que lhe está associado tem-se

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(A)$$

onde  $f_n(A)$  representa a frequência relativa do acontecimento  $A$  em  $n$  realizações independentes e sempre nas mesmas condições da experiência.

Um aluno do 12º ano não tem a noção de variável aleatória e de limite de uma função<sup>2</sup>. Assim, esta aproximação frequencista da probabilidade é introduzida dando referência que a definição tem como base de sustentação um resultado teórico conhecido por LGN, mas sem o enunciar formalmente.

Apesar do conceito frequencista de probabilidade aparentar ser simples, observa-se, em campo, que a maioria dos alunos tem dificuldades em entendê-lo a partir de uma aula expositiva, e confunde-o com o conceito clássico de probabilidade (ou, simplesmente, não entendem a diferença). Como exemplo veja-se que apenas 7 alunos, num universo de 55 alunos, responderam correctamente à seguinte questão, retirada de um exame nacional (Época Normal, 1995), e apresentada num teste após o tema aproximação frequencista de probabilidade ter sido abordado em aulas expositivas com resolução de exercícios tipo.

<sup>2</sup>Para alunos do 12º ano de escolaridade a Definição 1 deverá ser apresentada recorrendo à interpretação empírica do limite da seguinte forma: a probabilidade de um acontecimento  $A$  é o valor para o qual a sequência (empírica) de frequências relativas observadas de  $A$  tende a estabilizar à medida que aumenta indefinidamente o número de realizações, independentes e sempre nas mesmas condições, da experiência.



## [Exemplo da Utilização do Excel na Abordagem do Conceito Frequencista de Probabilidade]

### Questão:

A tabela seguinte refere-se aos dados obtidos nos estudos clínicos realizados para avaliar a actividade terapêutica de um medicamento.

Fases da experiência	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª
Nº de doentes medicados	120	235	528	822	1099	2244
Nº de doentes que registaram melhoras	52	126	310	490	659	1346

Com base nos resultados obtidos, os investigadores concluíram que a probabilidade de obter êxito com o referido medicamento é de 0,60. Comente a conclusão a que chegaram os investigadores, referindo a lei em que se basearam.

Seria esperado que os alunos aludissem à LGN, calculassem as frequências relativas das melhoras obtidas com o medicamento em cada fase da experiência e indicassem o valor 0,60 como o valor em torno do qual essa sequência de frequências relativas calculadas tenderia a estabilizar à medida que se considera um número cada vez maior de doentes medicados. No entanto, observámos que a maioria das respostas dadas referiam que o valor 0,60 resultava de:

$$\frac{52 + 126 + 310 + 490 + 659 + 1346}{120 + 235 + 528 + 822 + 1099 + 2244}$$

Tal representará uma "aplicação" da fórmula  $\frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$  do conceito clássico de Probabilidade?

Entre os outros alunos houve vários que indicaram o valor  $\frac{1346}{2244}$ . Será uma "aplicação" do conceito frequencista, observando apenas o par com maior número de "experiências"?

### 3. Uma proposta utilizando o Excel

As folhas de cálculo são um tipo de software adaptável à resolução de problemas numéricos e ao uso de processos iterativos, sendo um possível instrumento de trabalho no ensino da Matemática, em particular, das Probabilidades e da Estatística. Veja-se, por exemplo, o site do projecto ALEA onde se apresentam algumas propostas de trabalho sobre Probabilidades executadas em Excel.

Relativamente ao ensino do conceito frequencista de probabilidade, o Excel torna-se um instrumento útil na simulação de experiências e no apoio ao cálculo de valores experimentais para a probabilidade.

Tendo em conta a nossa experiência, a seguir propomos uma actividade para trabalhar o conceito frequencista de probabilidade a realizar com recurso a ficheiros em Excel. Esses ficheiros são aqui designados por *Simulação 1* e *Simulação 2* e simulam a repetição de experiências envolvendo dados. Os passos para a construção do ficheiro *Simulação 2* encontram-se descritos na secção seguinte. O processo de construção do ficheiro *Simulação 1* é análogo.

### Actividade:

#### 1. Considera o seguinte problema:

Num certo jogo, lançam-se, simultaneamente, cinco dados equilibrados, cada dado com as faces numeradas de 1 a 6. Para se ganhar é preciso que saia o número 5 em pelo menos um dos dados e nunca o número 6. Qual é a probabilidade de se ganhar o jogo?

## [Exemplo da Utilização do Excel na Abordagem do Conceito Frequencista de Probabilidade]

Recorrendo à aplicação Excel, simula o jogo descrito usando o ficheiro *Simulação 1*.

1.1 Completa a seguinte tabela:

Número de experiências	Frequência relativa de ganhos
50	
500	
2000	
5000	
10000	

1.2 Indica uma aproximação para a probabilidade pedida.

1.3 Observa se as frequências relativas calculadas tendem a estabilizar em torno de algum valor. Indica pois o valor da probabilidade pedida de acordo com a definição frequencista de probabilidade.

1.4 Baseando-te na definição clássica de probabilidade, indica o valor da probabilidade pedida<sup>3</sup>.

1.5 Compara os valores que indicaste nas alíneas anteriores e comenta.

2. Considera o seguinte problema:

*Num certo jogo, um jogador lança três dados equilibrados, cada um com as faces numeradas de 1 a 6. Se a soma dos números saídos for superior ou igual a 14 o jogador ganha, se a soma for inferior a 14 o jogador perde. Qual é a probabilidade de se ganhar o jogo?*

Recorrendo ao programa Excel, simula a experiência descrita usando o ficheiro *Simulação 2*.

2.1 Completa a seguinte tabela:

Número de experiências	Frequência relativa de ganhos
50	
500	
2000	
5000	
10000	

2.2 Que conclusões podes tirar da análise da tabela?

2.3 Indica o valor da probabilidade pedida, de acordo com a definição frequencista de probabilidade.

2.4 Indica o valor da probabilidade pedida, de acordo com a definição clássica de probabilidade<sup>4</sup>.

2.5 Compara os valores que indicaste nas alíneas anteriores e comenta.

3. Relativamente à pergunta: como averiguar se uma moeda é equilibrada?, qual(is) das seguintes afirmações te parece(m) efectivamente correcta(s)?

3.1 A moeda é equilibrada porque existe um resultado favorável em dois possíveis.

3.2 Determina-se um valor aproximado da probabilidade de obter cara lançando-se a moeda 100 vezes; a probabilidade de obter cara será aproximadamente igual ao quociente entre o número de caras obtido e 100.

3.3 Determina-se o valor da probabilidade de obter cara lançando-se a moeda 1000 vezes; probabilidade de obter cara será exactamente igual ao quociente entre o número de caras obtido e 1000.

4. Em relação à questão anterior seria possível recorrer à definição frequencista de probabilidade? Em caso afirmativo, como determinarias a probabilidade pedida?

As questões 1.3, 2.3, 3 e 4 permitirão avaliar a assimilação do conceito por parte do aluno no início, durante e no final da actividade. A questão 3 tem dois objectivos: i) verificar se o aluno identifica uma situação onde o

<sup>3</sup>A resposta é  $\frac{5 \times 4^4 + 10 \times 4^3 + 10 \times 4^2 + 5 \times 4 + 1}{6^3} \approx 0,27019$

<sup>4</sup>A resposta é  $\frac{35}{6^3} \approx 0,162037$

## [Exemplo da Utilização do Excel na Abordagem do Conceito Frequencista de Probabilidade]

conceito clássico não é aplicável; ii) observar se o aluno entende a frequência relativa como uma aproximação da probabilidade. Com a questão 4 pretende-se verificar se o aluno é capaz de traduzir, por suas próprias palavras e para a situação específica colocada, a interpretação frequencista de probabilidade.

Uma actividade análoga foi realizada numa das salas de informática da Escola Secundária D. Inês de Castro (Alcobaça) no primeiro período do ano lectivo de 2003/2004. As turmas do 12º ano foram divididas em grupos de dois ou três alunos, repartidos pelos doze computadores disponíveis na sala. Durante a realização da actividade os alunos foram acompanhados por dois professores que os iam orientando nas tarefas informáticas e nas questões que requeriam a aplicação do conceito de Laplace, para que a comparação entre os valores obtidos nos dois conceitos tivesse sentido. A duração da actividade foi de cerca de cem minutos por turma estando envolvidos um total de 112 alunos.

Avaliados os trabalhos realizados constatámos que, no início da actividade, 73,2% dos alunos demonstravam não dominar o conceito. No final da actividade, 88,6% daqueles respondiam correctamente a questões de desenvolvimento e 86 dos 112 alunos demonstravam compreender a definição trabalhada. Curiosamente, observámos que alguns alunos são capazes de reproduzir a definição mas não de traduzi-la perante um problema concreto.

### 4. Construção de um simulador em Excel

As aplicações em Excel atrás referidas como *Simulação 1* e *Simulação 2* e anexas às questões 1 e 2, respectivamente, são similares pelo que apenas passaremos a descrever os comandos em Excel (versão portuguesa) do ficheiro *Simulação 2*. Este ficheiro simula a realização sucessiva do jogo associado à questão 2 da actividade aqui proposta. Concretamente, simula o lançamento de três dados, calcula a soma do número de pintas obtidas em cada um dos dados e auxilia o utilizador a encontrar valores experimentais para a probabilidade do jogador ganhar ou perder. Para a repetição do jogo recorreremos à construção de macros apropriadas as quais também descrevemos. A interface da aplicação *Simulação 2* encontra-se na Figura 1.

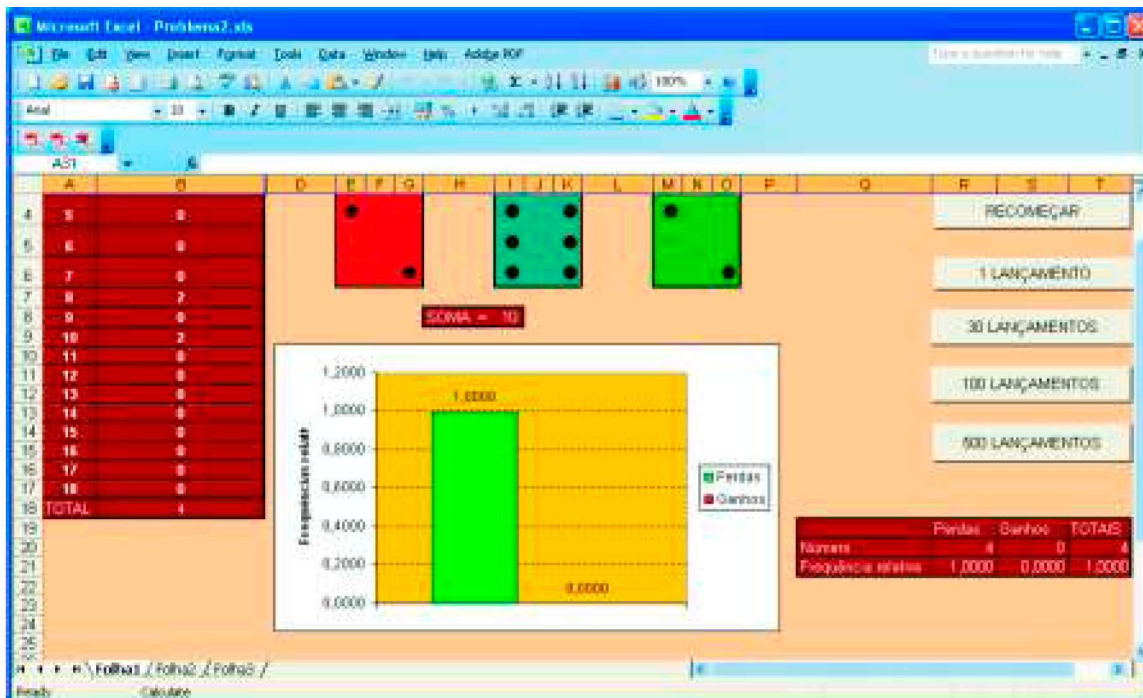


Figura 1: Interface da aplicação *Simulação 2*



#### 4.1 Simulação do lançamento de três dados

Começemos por descrever os procedimentos utilizados para construir, numa folha de cálculo, uma face de um dado e simular o lançamento do dado.

**Passo 1.** Gerar um número aleatório entre 1 e 6.

Numa das células (à escolha, de acordo com o sítio onde se pretende colocar a face visível do dado), por exemplo E3, insira-se a instrução:

$$=1+\text{INT}(6 \times \text{ALEATÓRIO}())$$

**Passo 2.** Construir a face visível do dado de acordo com o número obtido no Passo 1. (Suponha-se que a referida face do dado ficará no quadrado formado pelas células E4 a G4 por E4 a E6.)

Insiram-se as seguintes fórmulas nas células indicadas de acordo com a seguinte tabela.

Célula	Fórmula a inserir
E4	=SE(E3>1; CARÁCT(108))
E6	=SE(E3>3; CARÁCT(108))
G4	=E6
G6	=E4
E5	=SE(E3=6; CARÁCT(108))
F5	=SE(OU(E3=1;E3=3;E3=5); CARÁCT(108))
G5	=E5

**Passo 3.** Formatar a face visível do dado.

Formate-se o quadrado formado pelas células E4 a G4 por E4 a E6 todas com o mesmo tamanho (por exemplo: linha e coluna: largura 3 e altura 21) e tipo de letra Wingdings, tamanho 16, centrado. (A cor e o bordo do dado aqui ficam como opção).

No fim do passo 3 será visível uma face de um dado semelhante às faces ilustradas na Figura 1.

Para construir as outras duas faces dos outros dados repetem-se os passos 1, 2 e 3 atrás descritos adaptando as células.

#### 4.2 Registo da variável em estudo

Para a experiência a simular interessam considerar as variáveis: *soma* do número de pintas obtidas em cada uma das três faces visíveis dos três dados e o *número de ganhos*.

**Passo 4.** Calcular a variável *soma*.

Numa célula à escolha, por exemplo I8, coloque-se a instrução

$$=\text{SOMA}(E3:I3:M3)$$

onde I3 e M3 desempenham, para os dois últimos dados, o mesmo papel que E3 desempenha para o primeiro dado (Passo 1).

**Passo 5.** Registrar a ocorrência das variáveis *soma* e *número de ganhos*.

Coloque-se nas células A2,...,A17 os valores possíveis da variável *soma*. Construa-se uma coluna "fantasma"

## [Exemplo da Utilização do Excel na Abordagem do Conceito Frequencista de Probabilidade]

a esconder, por exemplo, coluna C2, ..., C19, que registará, em cada experiência, a ocorrência ou não de cada um dos valores das variáveis: *soma* (C2, ..., C17), *número de perdas* (C18) e *número de ganhos* (C19). Assim, coloquem-se as seguintes instruções conforme se indica na tabela:

Célula	Fórmula a inserir
.Ci, $i=2, \dots, 17$	=SE(I8=Ai;1;0) , $i=2, \dots, 17$
C18	=SE(E(I8>2;I8<14);1;0)
C19	=SE(E(I8>13;I8<19);1;0)

Por fim, são construídas tabelas de frequências das variáveis de interesse, de modo que os resultados de cada experiência sejam sucessivamente acrescentados nas tabelas.

**Passo 6.** Construir tabelas (conforme consta na Figura 1).

Construa-se uma tabela de frequências absolutas para a variável *soma* (veja-se, na Figura 1, a tabela do lado esquerdo). Para tal, na célula  $B_i$  coloque-se a instrução  $=B_i+C_i$ , para  $i=2, \dots, 17$ ; esta servirá de contador (incremento em cada experiência) para cada um dos valores possíveis da variável *soma*.

Construa-se (por exemplo, no retângulo formado pelas células Q19 a T19 por Q19 a Q21) uma tabela da frequência relativa de perdas e ganhos (veja-se, na Figura 1, a tabela do lado direito). Na célula R20 insira-se a instrução  $=R20+C19$  (que contabilizará o número de perdas acumuladas). Na célula S20 insira-se a instrução  $=S20+C20$  (que contabilizará o número de ganhos acumulados). As frequências relativas de perdas e ganhos são obtidas nas células R21 e S21, respectivamente, com as instruções  $=R20/T20$  e  $S20/T20$ , onde T20 contém a instrução  $=R20+S20$  (número total de lançamentos).

### 4.3 Criação de rotinas de repetição

Para permitir a repetição do jogo um determinado número  $n$  (pré-definido) de vezes são criadas macros, isto é, rotinas que possibilitem a repetição de comandos. Para criar uma macro é necessário aceder ao menu *Ferramentas*, opção *Macro* e escolher *Gravar nova macro*. Escolhida a opção *Gravar nova macro* executa-se o procedimento que se pretende repetir. A tecla F9 realiza o jogo uma e uma só vez. Para permitir a sua repetição  $n$  vezes clica-se  $n$  vezes em F9 e, por fim, em *Terminar gravação* (no menu *Ferramentas*, opção *Macro*).


Para criar uma macro que permita recomeçar a simulação do início grava-se uma nova macro inserindo novamente todas as instruções indicadas anteriormente no Passo 6.

Para accionar, de uma forma visível, uma macro inserem-se botões de acção semelhantes aos botões que aparecem no lado direito da Figura 1. Para associar um botão a uma macro, primeiro selecciona-se, no menu *Ver*, a opção *Barra de ferramentas* seguida de *Caixa de ferramentas dos controlos*. Escolhida esta opção aparecerá no ecrã uma caixa contendo vários tipos de botões; selecciona-se *Botão de comando* e insira-se o botão no local pretendido. Clicando no botão direito do rato pode-se editar o texto presente no botão assim como atribuir-lhe uma das macros gravadas.

### 4.4 Funcionamento da aplicação

O processo prático de simulação e repetição do jogo consiste em clicar num dos botões de acção. A experiência é simulada e os resultados são apresentados sob forma de tabelas e/ou gráficos conforme o pretendido. Deste modo, pode-se observar o valor para o qual tendem a estabilizar as frequências relativas de ganhos e de perdas quando o número de realizações da experiência aumenta.

## 5. Conclusão

Toda a actividade pedagógica que recorra a ferramentas informáticas tem, por parte dos jovens, uma maior aceitação. Os alunos sentem-se fascinados por métodos de ensino que recorram ao uso de computador, tendo por consequência efectiva, o aumento dos níveis de motivação e predisposição para a aprendizagem. A actividade aqui referida e realizada no ano lectivo 2003/04 com recurso a ficheiros Excel foi gratificante para docentes e alunos. Com base no ficheiro *Simulação 2* aqui descrito outros podem ser construídos. A realização desse tipo de actividade contribui "para esclarecer conceitos através da experimentação e para dinamizar discussões de tipo científico, bem como para incentivar o trabalho cooperativo", como promove o programa de Matemática do 12º ano. 

## Agradecimentos

Agradecemos à Professora Maria Eugénia Graça Martins e ao (à) referee os comentários e sugestões que permitiram melhorar a redacção do texto.

## Bibliografia

**Fisz, M.** (1980). *Probability Theory and Mathematical Statistics*. New York: Wiley.

**Guzmán, M.** (1991). "Os perigos do computador no ensino da Matemática." *Actas de las jornadas sobre Enseñanza experimental de la Matemática en la Universidad*, 9-27.

**Ponte, J. P.** (1991). "O computador na Educação Matemática." *Cadernos de Educação e Matemática*, 2. Lisboa: APM.

<http://www.teacherlink.org/content/math/activities/ex-randomevents/home.html>

<http://www.stanford.edu/~savage/software.htm>

<http://gator.dt.uh.edu/hodgess/Stat1/probl1.html>

<http://www.forsyth.k12.ga.us/kadkins/probab.htm>

<http://www.mat-no-sec.org>. Novo programa de Matemática A do 12ºano.

<http://alea.ine.pt/Projecto ALEA>.