por António Machiavelo
[Departamento de Matemática Pura da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto]

O Teorema Mais Famoso

Toda a gente conhece o teorema dito «de Pitágoras». Mas sabe o leitor porque é verdade para TODOS os triângulos rectângulos? Como podemos ter a certeza ABSOLUTA? E como foi descoberto? Foi mesmo Pitágoras quem o descobriu? Quem primeiro o demonstrou?

O «teorema de Pitágoras» é, sem qualquer dúvida, o resultado matemático mais conhecido. A simplicidade do enunciado, conjugada com o facto de ser uma observação bastante subtil sobre uma curiosa relação entre figuras geométricas simples – nomeadamente três quadrados construídos sobre os lados de um triângulo rectângulo –, fazem com que este resultado apele a um certo sentido estético abstracto que os seres humanos possuem, mesmo aqueles que não gostam de o admitir.

Há muitas e variadas maneiras de demonstrar o teorema de Pitágoras. Em 1968 Elisha S. Loomis publicou um livro, há muito esgotado, intitulado *The Pythagorean Proposition*, contendo nada mais, nada menos do que 367 demonstrações! Algumas são pequenas variações de outras, sendo difícil dizer exactamente quantas são essencialmente distintas. Para ter uma ideia do tipo de argumentos, sugere-se a consulta da página mantida por Alexander Bogomolny, e que contém 79 demonstrações[1].

Porquê tantas demonstrações? Afinal, uma demonstração não é só um argumento que mostra a validade de um resultado matemático, de modo a que não restem quaisquer dúvidas? Assim sendo, não basta uma? De facto, não é bem assim... Em Matemática não se quer apenas decidir a validade ou falsidade de certas proposições, mas também *perceber a fundo* os resultados que se vão descobrindo e as inter-relações entre os diferentes «entes» matemáticos. Assim, argumentos distintos são muitas vezes úteis para dar diferentes perspectivas de um mesmo resultado, servir para o generalizar de diversos modos e para mostrar diferentes conexões entre alguns assuntos.

Uma pequena curiosidade: a quinta demonstração na lista de Bogomolny é atribuída a James Abram Garfield (1831--1881), o vigésimo presidente dos Estados Unidos da América[2].

A página *Matemática sem Palavras*[3] do *site* «ATRACTOR: Matemática Interactiva», mantido pela Associação Atractor, contém três demonstrações com *applets* interactivos, a primeira das quais é, essencialmente, a minha favorita – uma das mais simples e elegantes, e que pode ser resumida do seguinte modo: dado um triângulo rectângulo, coloquem-se quatro cópias dele numa caixa quadrada cujo lado é igual à soma dos comprimentos dos dois catetos, do modo indicado na imagem esquerda da figura 1. Usando o facto da soma dos ângulos internos de um triângulo rectângulo ser igual a dois ângulos rectos, é fácil concluir que a área livre na caixa tem a forma de um quadrado cujo lado é a hipotenusa do triângulo rectângulo dado.

Rearranjando, na mesma caixa, os quatro triângulos do modo sugerido na imagem direita da figura 1, para o que basta transladar dois dos triângulos, do modo indicado na imagem do meio, é fácil ver que a área livre é agora igual à soma de dois quadrados cujos lados são precisamente os catetos. Como se trata da mesma caixa e dos mesmos quatro

[1]http://www.cuttheknot.org/pythagoras/ index.shtml
[2]O segundo presidente americano a ser assassinado, pelo que ocupou a Casa Branca por apenas seis meses.
[3]http://www.atractor.pt/mat/sem_palavras/ entrada_pitagoras.htm

Uma demonstração muito simples do Teorema de Pitágoras.

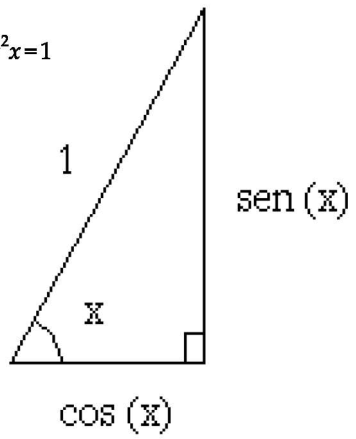
triângulos rectângulos, as áreas livres nas duas situações têm de ser iguais e portanto: *num triângulo rectângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos*!

Curiosamente, uma ligeira variante deste argumento fornece uma demonstração[4] da fórmula de adição do seno: ver «Seno da soma» na página do Atractor acima mencionada.

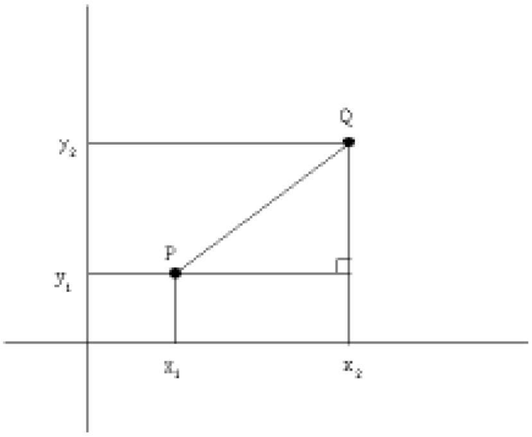
Já vi muitos alunos do ensino secundário realmente perplexos por lhes ter observado que as fórmulas seguintes são consequências directas do teorema de Pitágoras:

1. a chamada *fórmula fundamental da trigonometria*:

$$sen^2 x + cos^2 x = 1$$

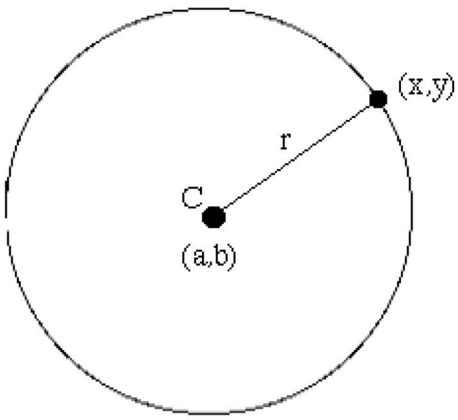


2. a fórmula para a distância euclidiana entre dois pontos, $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$, do plano cartesiano, nomeadamente:



$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

3. a equação cartesiana de um círculo[5] de raio r e centro $C = (a, b)$:



$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Quando se ensina estas matérias não se devia nunca deixar de notar e de realçar estas ligações, que ajudam o aluno a melhor compreender os assuntos leccionados e a integrar os seus conhecimentos numa perspectiva mais completa.

O *site* «História da Matemática – história dos problemas», mantido por Maria João Lagarto, contém uma página intitulada *Problemas Pitagóricos*[6] onde se dão vários exemplos de problemas curiosos, retirados

[4]Que, tanto quanto sei, se deve a Volker Priebe e Edgar A. Ramos, que a publicaram como uma «demonstração sem palavras» na revista *Mathematics Magazine* **73** (2000), p. 392.
[5]Esta é, de facto, uma consequência imediata da fórmula anterior.
[6]http://www.malhatlantica.pt/mathis/Problemas/Pitagoras/Pitagoricos.htm

de textos antigos e de várias proveniências, que envolvem o uso do teorema de Pitágoras.

A descoberta do teorema de Pitágoras perde-se nos primórdios do período histórico da nossa espécie, havendo algumas evidências do seu conhecimento nas primeiras grandes civilizações, mas as dúvidas são muitas e as certezas muito poucas. O papel que Pitágoras terá tido neste assunto é muito mais incerto do que o leitor possa imaginar. O nosso conhecimento dessa figura quase mítica é relativamente escasso e, como se isso não bastasse, impregnado de lendas, contradições e documentos forjados. De facto, e contrariamente ao que se possa pensar, não há nenhuma evidência histórica fiável de que Pitágoras se tenha sequer dedicado à Matemática! Ver:

http://plato.stanford.edu/entries/pythagoras/

Deixamos para a próxima rubrica algumas considerações sobre este assunto, assim como especulações sobre as possíveis origens deste resultado basilar de muita matemática, com incontáveis e importantíssimas aplicações. M