O Que É...

por **Waldyr Oliva**
[Instituto Superior Técnico]

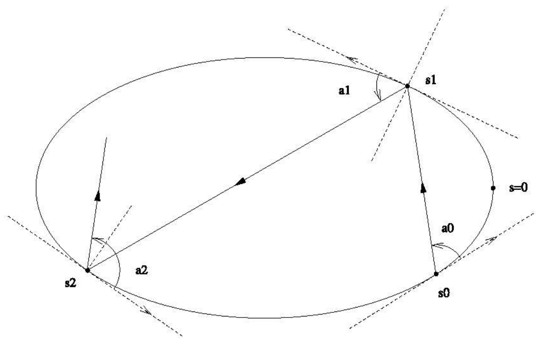
O Bilhar?

Um bilhar matemático é definido por uma região convexa do plano, limitada por uma curva fechada, onde se movimenta uma partícula pontual que se reflecte de cada vez que choca com a curva, à semelhança de uma bola de bilhar. O estudo das possíveis trajectórias da partícula é um problema matemático muito interessante.

O "problema da bola de bilhar" foi introduzido por Birkhoff ([3], 1927), que o concebeu como um modelo para a chamada dinâmica Hamiltoniana. Trata-se de considerar o movimento de uma partícula (massa pontual) que se desloca livremente numa região convexa D do plano, limitada por uma curva fechada e diferenciável B (o "bilhar") e de modo que a partícula se reflicta elasticamente ao chocar com B de acordo com a lei: "o ângulo de reflexão é igual ao ângulo de incidência." Em cada instante o estado da partícula é determinado pela posição em que se situa em D e pela direcção do movimento. A sua dinâmica reduz-se portanto a uma questão de geometria elementar (ver a figura). A partir do movimento definido acima, introduz-se a "aplicação bilhar" $T : M = B \times [0, \pi] \to M$ que descreve a dinâmica de uma colisão à colisão seguinte. Como entre dois impactos consecutivos a partícula move-se em linha recta, uma órbita de T fica especificada pela sequência das suas posições e direcções imediatamente após cada impacto. A posição em B será parametrizada pelo comprimento de arco s, módulo L, em que L é o comprimento total de B. O conjunto $M = B \times [0,\pi]$, chamado "espaço de fase" do bilhar, tem como coordenadas o par (s,α) em que $\alpha \in [0,\pi]$ é o ângulo que o vector unitário da velocidade após o impacto faz com o vector tangente a B no ponto de coordenada s.

É também usual considerar os pares (s, p), $p = \cos(\alpha)$, para representar os pontos de M e neste caso $M = [0,L) \times [-1, 1]$ que, face à periodicidade de s, se identifica, topologicamente, com uma faixa cilíndrica.

Uma órbita de T consiste, portanto, numa sucessão de pares (s_n, p_n) obtidos após os impactos da partícula com B a partir da "condição inicial" (s_0, p_0). A dinâmica discreta da aplicação bilhar fica definida pela função $T\ (s_n, p_n) = (s_{n+1}, p_{n+1})$ e pode-se demonstrar que, nas coordenadas (s, p), ela preserva área e orientação, embora haja problemas a analisar



no que toca à sua diferenciação nos pontos das componentes da fronteira da faixa cilíndrica (ver [5], p.343).

O estudo qualitativo das órbitas da aplicação bilhar T pode não só conduzir a situações previsíveis, no sentido de que pequenas mudanças nas condições iniciais provocam pequenas mudanças na órbita, bem como a situações não previsíveis em que pequenas mudanças nas condições iniciais provocam alterações radicais na órbita perturbada e, em certos casos, as duas situações podem ocorrer simultaneamente para diferentes escolhas das condições iniciais.

Existem três casos em que a órbita pode ser analisada no espaço de fase:

1º) Um conjunto finito de $N \gg 1$ pontos distintos $(s_0, p_0), (s_1, p_1), \ldots, (s_{N-1}, p_{N-1})$ repete-se após N

Caderno_4_AF
s bado, 6 de Dezembro de 2008 0:44:53

impactos, isto é, $T(s_{N-1}, p_{N-1}) = (s_0, p_0)$. Neste caso a órbita de T diz-se "periódica" de período N e na faixa cilíndrica fica determinado um conjunto discreto de N pontos. Se $N = 1$, isto é, se $T(s_0, p_0) = (s_0, p_0)$, obtem-se o que se chama um "ponto fixo" de T.

2º) As iteradas de uma condição inicial (s_0, p_0) preenchem uma curva denominada "curva invariante", isto é, T transforma essa curva nela própria sem que nenhum ponto da curva seja transformado nele mesmo. Isso ocorre, por exemplo, no caso em que T é "integrável" no sentido de que existe uma constante do movimento na forma de uma função real $F(s, p)$ que assume o mesmo valor em todos os pontos da órbita, isto é, as curvas de nível de F são as curvas invariantes.

3º) As iteradas de (s_0, p_0) preenchem uma "área" da faixa cilíndrica. Isto acontece quando a órbita não admite constantes de movimento e passa a evoluir de uma forma "caótica".

Observemos, inicialmente, que o bilhar circular (B é uma circunferência) é integrável com a constante de movimento $F(s, p) = p$ e, portanto, o espaço de fase é coberto por curvas invariantes paralelas à direcção s, excluindo-se, desde já, o 3º caso acima mencionado.

Berry [1] mostra três deformações de um bilhar circular, passando inicialmente por um bilhar em forma de estádio ([1], fig.4) em que para quase toda a condição inicial (s_0, p_0) as iteradas (s_n, p_n) comportam-se de forma "ergódica", isto é, tais iteradas passam arbitrariamente próximo de qualquer ponto do espaço de fase, para n suficientemente grande. A seguir, deforma o bilhar circular numa elipse e obtem-se o resultado descoberto por Birkhoff de um bilhar integrável com uma forma explícita para a constante do movimento. Neste ponto convém ainda mencionar ([3], 1927) que Birkhoff afirmou desconhecer bilhares integráveis que não fossem os circulares ou os elípticos. Também é de observar que as folheações do espaço de fase são muito distintas (topologicamente) nestes dois casos integráveis conhecidos:

i) nos bilhares elípticos ([1], fig.7) parte do espaço de fase é folheada por curvas invariantes zero-homotópicas (todo o laço dessa parte pode ser deformado continuamente no laço trivial, ver [4]),

ii) no caso do bilhar circular todas as curvas invariantes são não zero-homotópicas.

Numa terceira deformação do bilhar circular obtêm-se certas "ovais" que são genéricas no sentido que os bilhares correspondentes apresentam simultaneamente os vários tipos de órbitas acima mencionados ([1], p.97).

Lembremos agora que o bordo de M é o conjunto dos pontos $(s, p) \in M$ em que $p = \pm 1$. Sobre a questão da existência ou não de outros bilhares integráveis distintos dos circulares e dos elípticos, há que enunciar a seguinte Conjectura de Birkhoff: "Se uma vizinhança do bordo de M é folheada por curvas contínuas fechadas, invariantes e não zero-homótopicas em M, então B é uma elipse."

Um notável e esclarecedor resultado é devido a Bialy ([2], Theorema A, 1993): "Se todo o espaço de fase M da aplicação bilhar T, correspondente a um bilhar B, é folheado por curvas contínuas, fechadas invariantes e não zero-homotópicas, então B é uma circunferência." Sobre esta e outras contribuições de Bialy, bem como de Rychlik ([6], 1989) é de grande interesse a leitura do artigo de Wojtkowski ([7], 1994). Finalmente, para maiores considerações sobre o problema do bilhar há que consultar o capítulo 9 do livro de Katok e Hasselblatt [5]. M

Referências

[1] **M.V. Berry** (1981). *"Regularity and chaos in classical mechanics, illustrated by three deformations of a circular billiard"*, Eur. J. Phys 2, 91 – 102 .

[2] **M. Bialy** (1993). *"Convex billiards and a theorem by E. Hopf"*, Mathematische Zeitschrift, 214, 147– 154.

[3] **G. D. Birkhoff** (1927). *"Dynamical systems"*, Colloq. Publ. Vol.IX, Providence R.I. AMS .

[4] **G. Granja** (2008). *"O que é o grupo fundamental?"*, Gazeta de Matemática nº 0155.

[5] **A. Katok e B. Hasselblatt** (2005). *"A moderna teoria de sistemas dinâmicos"*, Edição da Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa .

[6] **M.R.Rychlik** (1989).*"Periodic points of the billiard ball map in a convex domain"*, J. Differential Geometry 30, 191 – 205.

[7] **M.Wojtkowski** (1994). *"Two applications of Jacobi fields to the billiard ball problem"*, J. Differential Geometry 40, 155 – 164 .