

# Rosetas

Coroas circulares decoradas com diferentes padrões, que lhes dão a aparência final de rosas ou estrelas, são motivos ornamentais muito apreciados desde a antiguidade. A riqueza e variedade geométrica destes padrões sugerem-nos uma viagem que nos levará da Pompeia destruída à vila de Alpedrinha.

## Introdução.

Um motivo ornamental relativamente comum consiste numa coroa circular preenchida com diferentes padrões geométricos que lhe dão a aparência final de uma rosa ou estrela. Em geral, designaremos por *roseta* qualquer figura com estas características. A atracção de muitos arquitectos e artistas pelas rosetas pode eventualmente ser explicada pela ênfase visual que estas proporcionam sobre o seu centro. A respeito do uso de rosetas em arquitectura, recomendamos a leitura de [4].

No presente texto, iremos encetar uma digressão por certos tipos de rosetas, não deixando fugir a oportunidade de aproveitar um motivo há muito apreciado em arte e arquitectura para ilustrar alguns conceitos geométricos, tais como os de inversão e conformalidade. Em particular, inspirados por [2], tomaremos como ponto de partida as *rosetas de rombóides*, como aquela que mostramos na Figura 1. Um exemplo deste tipo de roseta pode ser encontrado como adorno da orla de uma janela circular no Mosteiro de Santa Maria de las Cuevas (La Cartuja) em Sevilha. No seguimento, abordaremos o problema de construir uma roseta análoga à da Figura 1, mas utilizando para tal  $k$  bandas de rombos (losangos), em vez de rombóides. Veremos como a *roseta de rombos* está intimamente associada a um outro tipo de rosetas, as *rosetas logarítmicas* (Figuras 7

e 8), construídas a partir da espiral homónima. O impacto visual das rosetas logarítmicas não difere muito daquele proporcionado pelas *rosetas circulares* (Figura 10), bem mais fáceis de construir. Retornando ao ponto de partida, rosetas de rombóides podem ser obtidas por inversão a partir de rosetas circulares.

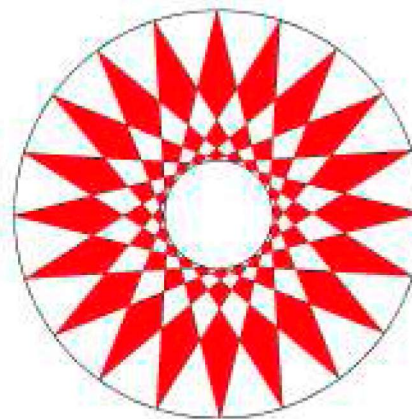


Figura 1 - roseta com  $k = 3$  bandas de rombóides

**Rosetas e simetria.** O grupo de simetria de uma figura  $F$  no plano é constituído por todas as isometrias que deixam  $F$  invariante. Recorde-se que existem precisamente quatro tipos de isometrias no plano: reflexões, translações, rotações e reflexões deslizantes (reflexão numa recta seguida de uma

translação com a direcção dessa mesma recta). Cada uma das rosetas que vamos construir admite o *grupo diedral*  $D_n$  como grupo de simetria.  $D_n$  tem  $2n$  elementos ( $n$  reflexões,  $n-1$  rotações e a transformação identidade) e é *gerado* por uma rotação de ângulo  $2\pi/n$  em torno de um ponto  $O$  e uma reflexão em relação a uma recta passando por esse mesmo ponto, isto é, podemos obter qualquer elemento de  $D_n$  por composição destas duas isometrias.

**Construção de uma roseta de rombóides.** Para construir uma roseta como aquela da Figura 1, com  $k$  bandas de rombóides, podemos proceder do modo que é indicado em [2]: dadas duas circunferências concêntricas, dividimos ambas em  $n$  partes iguais e enumeramo-las de igual forma; traçamos segmentos que unam a divisão  $i$  da circunferência interior às divisões  $i+k$  e  $i-k$  da circunferência exterior, para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ . O valor de  $n$  deverá ser suficientemente grande de forma a evitar que os segmentos intersectem a circunferência interior. A Figura 2 ilustra este procedimento para  $k=3$  e  $n=20$ .

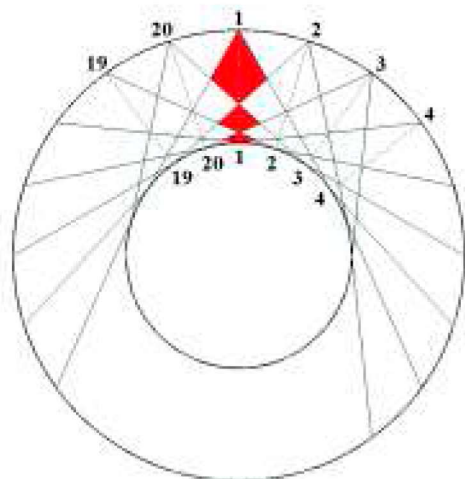


Figura 2

**Construção de uma roseta de rombos.** Consideremos agora o problema de construir uma roseta com  $k$  bandas de rombos semelhantes. Este problema admite uma solução elementar quando o raio da circunferência exterior não é fixado à partida. Com efeito, nesta situação basta começar por dividir a circunferência interior em  $n$  partes iguais e construir a

primeira banda de rombos utilizando um valor arbitrário para a razão entre os semi-eixos dos mesmos; de seguida, prolongar os lados destes rombos para formar a segunda banda de rombos, repetindo sucessivamente este processo até obter as  $k$  bandas, como a Figura 3 sugere.

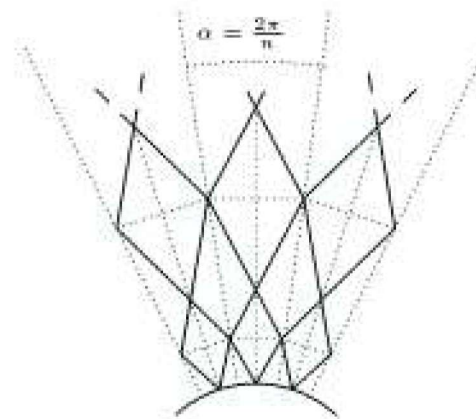


Figura 3

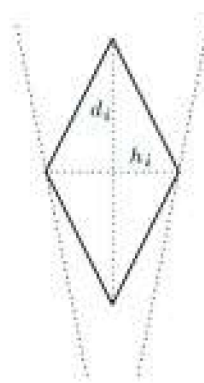


Figura 4

Denotemos por  $h_i$  e  $d_i$  as medidas dos semi-eixos dos rombos que estão sobre a banda  $i$  (ver Figura 4). Seja  $r$  o raio da circunferência interior. Uma propriedade fundamental das rosetas que acabámos de construir reside no facto da progressão  $d_1, d_2, d_3, \dots$  ser geométrica. Com efeito: uma vez que os rombos em cada sector circular de ângulo  $\alpha = 2\pi/n$  são semelhantes entre si, vai existir uma constante  $c$  tal que  $h_i/d_i = c$ , para qualquer  $i = 1, 2, \dots, k$ ; por outro lado, temos

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{h_1}{r+d_1} = \frac{h_2}{r+2d_1+d_2} = \dots = \frac{h_i}{r+2d_1+2d_2+\dots+2d_{i-1}+d_i};$$

denotando  $t = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$  por simples manipulação algébrica obtém-se

$$d_1 = \frac{rt}{c-t}$$

e por indução é então possível concluir (deixando os detalhes ao cuidado do leitor) que

$$d_i = d_1 \left( \frac{c+t}{c-t} \right)^{i-1}$$

para qualquer  $i = 1, 2, \dots, k$ ; ou seja, os semi-eixos  $d_1, d_2, d_3, \dots$  obedecem a uma progressão geométrica de

$$\text{razão } \frac{c+t}{c-t}.$$

Suponhamos agora que os raios das duas

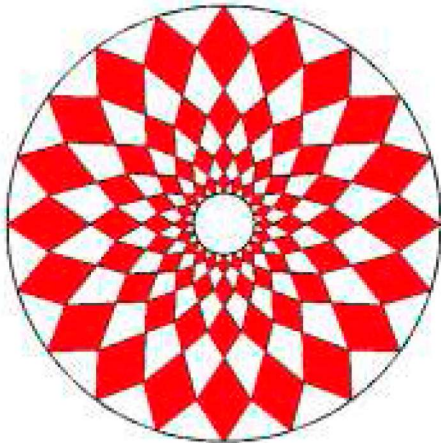


Figura 5 - roseta com  $k = 4$  bandas de rombos.

circunferências são dados. Para determinar os vértices dos rombos que a vão preencher, faremos uso daquela espiral pela qual Jacob Bernoulli no século XVII se deixou fascinar.

A *espiral logarítmica* é uma curva no plano que, em coordenadas polares  $(\rho, \theta)$ , é dada por uma equação do tipo

$$\rho(\theta) = r_0 e^{m\theta}$$

Trata-se de uma curva que corta todas as rectas

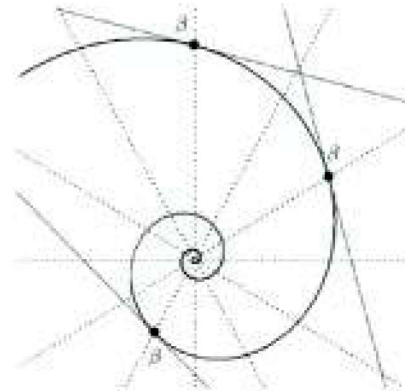


Figura 6 - espiral logarítmica.

radiais segundo um mesmo ângulo  $\beta = \operatorname{arctg} m$  (ver Figura 6), tal como as curvas loxodrómicas em relação aos meridianos na superfície esférica ou, mais simples, uma recta cortando um feixe de rectas paralelas. Na realidade, as projecções estereográficas das curvas loxodrómicas são precisamente espirais logarítmicas (ver [3], por exemplo). De outro ponto de vista, que iremos explorar mais à frente, uma espiral logarítmica é a imagem de uma recta oblíqua no plano por meio da aplicação  $(x, y) \mapsto (e^x \cos y, e^x \sin y)$ .

Para iguais incrementos no ângulo  $\theta$ ,

$$\theta_0 = 0, \theta_1 = \alpha, \theta_2 = 2\alpha, \theta_3 = 3\alpha, \dots,$$

os correspondentes valores de  $\rho$  vão ser

$$\rho_0 = r_0, \rho_1 = r_0 e^{m\alpha}, \rho_2 = r_0 (e^{m\alpha})^2, \rho_3 = r_0 (e^{m\alpha})^3, \dots$$

e, portanto, obedecem a uma progressão geométrica. Os dados estão pois lançados: inevitavelmente as espirais logarítmicas estão relacionadas com o problema que nos ocupa. Vejamos como proceder.

Sejam  $r$  e  $R$  os raios das circunferências interior e exterior, respectivamente. Sem perda de generalidade, vamos fixar  $r = 1$  de maneira a não sobrecarregar as notações. Começemos por dividir ambas as circunferências em  $n$  partes iguais e enumeremo-las de igual forma. Denotamos por  $\theta_i$  o ângulo polar da radial correspondente à divisão  $i$  e pomos  $\alpha = 2\pi/n$ . Para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ , unimos a divisão  $i$  da circunferência interior com as divisões  $i+k$  e  $i-k$  da circunferência exterior por meio dos segmentos de espiral obtidos por uma rotação de  $\theta_i$  radianos a partir de

$\rho(\theta) = e^{\frac{\theta \ln R}{k\alpha}}$ ,  $0 \leq \theta \leq k\alpha$  e  $\rho(\theta) = e^{-\frac{\theta \ln R}{k\alpha}}$ ,  $-k\alpha \leq \theta \leq 0$ , respectivamente. Obtemos assim uma *roseta logarítmica*<sup>1</sup>:

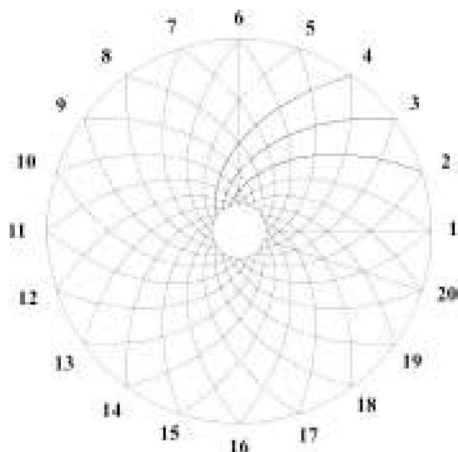


Figura 7 -  $n = 20$  e  $k = 5$

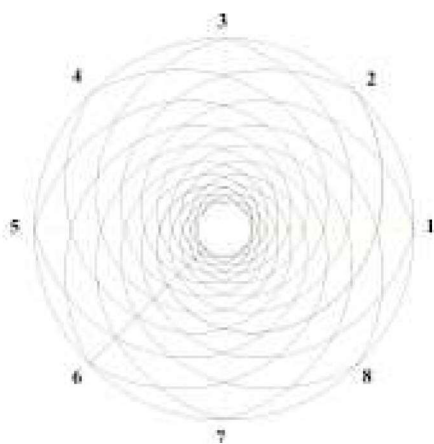


Figura 8 -  $n = 8$  e  $k = 9$

Sobre cada um dos segmentos radiais que dividem em partes iguais a nossa coroa circular existem precisamente  $k + 1$  pontos de intersecção com as espirais logarítmicas. Para um desses segmentos, denotemos os respectivos pontos de intersecção por  $P_1, P_2, \dots, P_{k+1}$ , em ordem crescente relativamente às suas distâncias à origem. Estas distâncias obedecem a uma progressão geométrica de razão  $R^{1/k}$ :

$$1, R^{1/k}, R^{2/k}, R^{3/k}, \dots, R.$$

Para cada  $i = 1, \dots, k$ , tracemos o rombo  $L_i$ , cujos vértices são  $P_i$  e  $P_{i+1}$ , juntamente com os pontos de intersecção da mediatriz do segmento  $P_i P_{i+1}$  com as radiais definidas pelos ângulos  $\theta_i + \alpha/2$  e  $\theta_i - \alpha/2$ , tal como a figura seguinte ilustra:

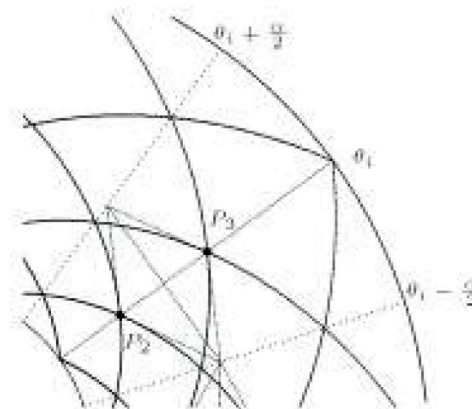


Figura 9

Denotemos por  $h_i$  e  $d_i$  os semi-eixos do rombo  $L_i$  (ver Figura 4). Como

$$d_1 = \frac{R^{1/k} - 1}{2} \quad \text{e} \quad d_i = d_1 R^{(i-1)/k},$$

os semi-eixos  $d_1, d_2, d_3, \dots, d_{k-1}$  obedecem também a uma progressão geométrica de razão  $R^{1/k}$ . Um cálculo longo mas directo mostra-nos que

$$c \equiv \frac{h_i}{d_i} = \frac{R^{1/k} - 1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)(1 + R^{1/k})}.$$

Assim, os rombos  $L_i$ , com  $i = 1, \dots, k$ , são semelhantes entre si. Repetindo este procedimento para todas as radiais  $\theta_i$ , com  $i = 1, \dots, n$ , obtemos então a roseta com  $k$  bandas de rombos semelhantes.

**Rosetas circulares.** Para a construção deste tipo de rosetas podemos repetir o procedimento já familiar: dadas duas circunferências concêntricas, de centro em  $O$ , dividimos ambas em  $n$  partes iguais e enumeramo-las de igual forma; para cada  $i$  consideremos a circunferência que passa pela divisão  $i$  da circunferência interior,  $I_i$ , pela divisão  $i + k$  da

<sup>1</sup>Um exemplar de roseta logarítmica foi encontrado num pavimento durante escavações nas ruínas da cidade de Pompeia e neste momento pode ser admirado no Museo Nazionale Romano, em Itália [4].

circunferência exterior,  $E_{i+k}$  e pelo centro  $O$ ; traçamos o arco desta circunferência compreendido entre  $I_i$  e  $E_{i+k}$ ; por reflexão, unimos também  $I_i$  a  $E_{i-k}$  por meio de um arco de circunferência; o resultado final será uma roseta como a da Figura 10.

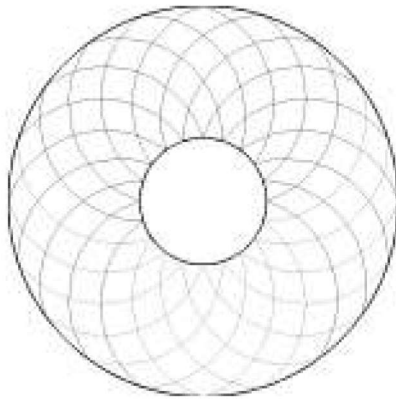


Figura 10 - roseta circular com  $n = 20$  e  $k = 3$ .

No Batistério di San Giovanni em Florença pode ser encontrado um exemplar de tal motivo [4]. Outro exemplar, é certo que não tão sofisticado, encontra-se no óculo da fachada principal da Igreja Matriz da vila de Alpedrinha (Concelho do Fundão).



Figura 11 - roseta circular na fachada principal da Igreja Matriz de Alpedrinha.

Embora para um observador desprevenido o efeito visual da nossa roseta circular possa parecer idêntico ao de uma roseta logarítmica, a diferença entre as duas pode ser facilmente detectada, uma vez

que na roseta logarítmica os “rombóides curvilíneos” são todos semelhantes entre si, ao contrário do que acontece com as rosetas circulares. A razão para a maior popularidade das rosetas circulares admite uma explicação simples: do ponto de vista do executante são bem mais fáceis de construir, por muito profundas que sejam as pretensões místicas do arquitecto.

**Rosetas e Inversões.** Consideremos um ponto  $P$  no plano e seja  $C$  uma circunferência de raio  $r$  e centro  $O$ . Suponhamos que  $O$  e  $P$  são pontos distintos. O *inverso* de  $P$  relativamente a  $C$  é o único ponto  $P'$  sobre a semi-recta com origem em  $O$  que passa por  $P$  tal que

$$|OP| \cdot |OP'| = r^2$$

A *inversão na circunferência*  $C$  é a transformação  $T$  do plano que a cada  $P \neq O$  faz corresponder o seu inverso relativamente a  $C$ . O centro  $O$  é também designado por *pólo da inversão*  $T$ .

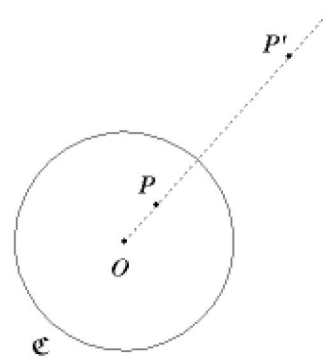


Figura 12 - O ponto  $P$  e o seu inverso relativamente à circunferência  $C$ .

É claro que  $T$  é *involutiva*, isto é, o inverso do inverso de um ponto é o próprio ponto. Temos ainda: se  $P$  está em  $C$  então  $P' = P$ ; o inverso de um ponto no interior de  $C$  é um ponto no exterior de  $C$  e o inverso de um ponto no exterior de  $C$  é um ponto no interior de  $C$ . As seguintes propriedades das inversões, que irão ser relevantes na nossa análise, não são tão óbvias (para detalhes consultar [1], por exemplo): o inverso de uma recta que não passa pelo pólo de inversão  $O$  é uma circunferência que passa por  $O$ ; o inverso de uma circunferência  $D$  que não passa em  $O$  é ainda uma circunferência que não passa em  $O$  (se  $D$  tem centro

em  $O$ , então a sua circunferência inversa também tem centro em  $O$ ).

A imagem de uma espiral logarítmica  $\rho(\theta) = r_0 e^{m\theta}$  por meio de uma inversão em relação a uma circunferência de raio  $R_0$  e centro na origem é ainda uma espiral logarítmica, a saber, aquela de equação

$$\rho(\theta) = \frac{R_0^2}{r_0} e^{-m\theta}.$$

Assim, se invertermos uma roseta logarítmica em relação a uma circunferência com o mesmo centro, obtemos uma nova roseta logarítmica.

Consideremos agora uma roseta circular com centro em  $O$ . Os segmentos de arco que a formam pertencem a circunferências que também passam por  $O$ . Assim, ao invertermos em relação a uma circunferência centrada em  $O$ , estes arcos de circunferência são transformados em segmentos de recta, de onde concluímos que a roseta circular vai ser transformada numa roseta de rombóides.

**Rosetas e conformalidade.** Consideremos de novo a função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$$

Esta função transforma: a recta horizontal  $y = \theta_0$  na semi-recta radial correspondente ao ângulo  $\theta_0$ ; a recta vertical  $x = R_0$  na circunferência de raio  $R_0$  e centro na origem; a recta oblíqua  $x = my + r_0$ , com  $m \neq 0$ , na espiral logarítmica  $\rho(\theta) = r_0 e^{m\theta}$ . Assim,  $f$  transforma a grelha da Figura 13 numa roseta logarítmica com  $k = 4$  bandas de rombos.

Mais podemos dizer sobre a função  $f$ : uma vez que qualquer circunferência corta os seus raios perpendicularmente e as espirais logarítmicas, como já observámos atrás, cortam todas as rectas radiais segundo um mesmo ângulo  $\beta = \arctg m$ , podemos concluir que  $f$  é uma função *conforme* em todo o seu domínio. Em geral, uma função de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^2$  diz-se

#### Referências:

- [1] P.V. Araújo (1999). *Curso de Geometria*, Gradiva.
- [2] E. Borrás Veses, P.M. Gómez, X.N. Moreno, A. A. Salanova (2002). *Ritmos: matemáticas e imágenes*, Nivola libros y ediciones.
- [3] J. F. Queiró (2002). "Pedro Nunes e as linhas de rumo." *Gazeta de Matemática*, nº 143.
- [4] K. Williams (1999). "Spirals and Rosettes in Architectural Ornament." *Nexus Network Journal*, vol.1.

conforme num ponto se preservar a medida e a orientação dos ângulos formados por curvas que se intersectam nesse ponto. Para o leitor familiarizado com funções complexas de variável complexa: se identificarmos  $\mathbb{C}$  com  $\mathbb{R}^2$ ,  $z = x + iy \cong (x, y)$ , qualquer função analítica  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  é conforme nos pontos onde a sua derivada não se anula e, reciprocamente, qualquer função conforme  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , cujas derivadas parciais existam e sejam contínuas em  $\mathbb{C}$ , é analítica em  $\mathbb{C}$ .

Podemos então perguntar que outros motivos ornamentais se podem obter a partir da grelha da Figura 13 por aplicação de transformações conformes. Como exemplo, apresentamos o caso

$$z \cong (x, y) \mapsto \cosh(z) \cong (\cosh(x) \cos(y), -\sinh(x) \sin(y)).$$

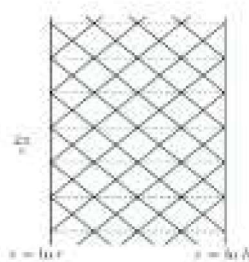


Figura 13 - os segmentos horizontais a tracejado têm entre si um espaçamento constante  $\Delta = 2\pi / n$



Figura 14 - "versão elíptica" da roseta logarítmica

Esta função é conforme, transforma rectas horizontais paralelas em elipses confocais e a grelha da Figura 13 no motivo da Figura 14. **M**