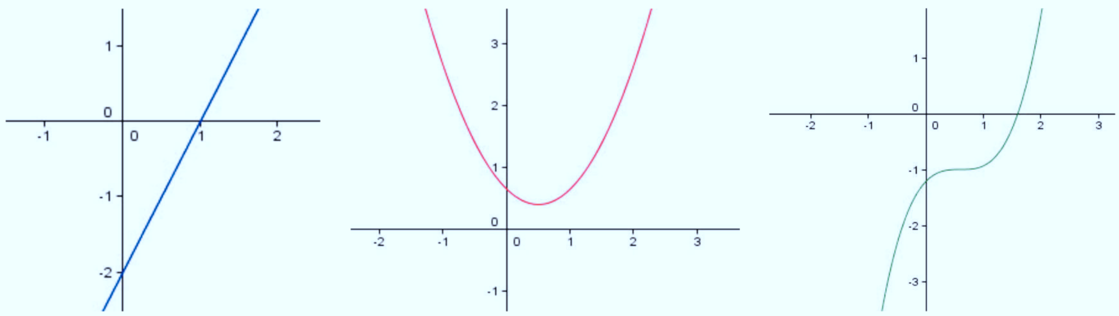
por Jorge Nuno Silva
[Universidade de Lisboa]

Polinómios

Todos pensamos conhecer bem esta classe de funções. Contudo, viajar por estes terrenos pode trazer surpresas, e não só aos mais distraídos…

Os polinómios são estudados bem cedo no currículo escolar. Correspondem-lhes funções com representações gráficas simpáticas e, aparentemente, poucos segredos.



Gráficos de polinómios de graus 1, 2 e 3.

As expressões gerais dos polinómios representados são

$$y=ax+b;\ y=ax^2+bx+c;\ y=ax^3+bx^2+cx+d$$

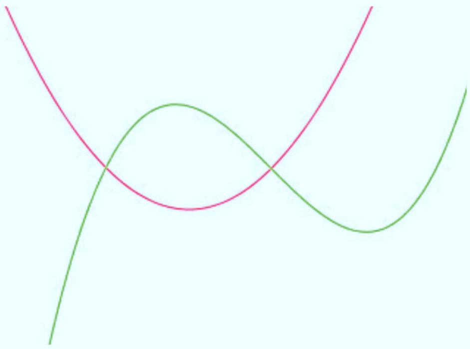
onde a, b, c e d são números.

Que uma função linear fica definida pelo seu valor em duas concretizações da variável é fácil de admitir, já que temos dois parâmetros, a e b, na equação geral, que podemos afinar. Por exemplo, se quisermos a função linear P tal que $P(0)=-2$ e $P(1)=0$, basta-nos resolver o sistema

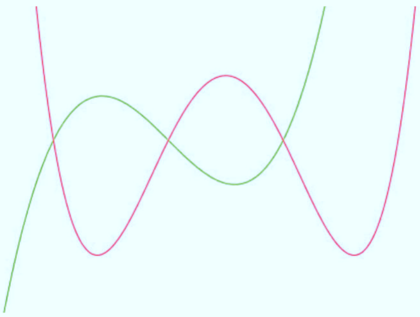
$$-2=a\times 0+b\ ;\ 0=a\times 1+b,$$

cuja solução é $P(x)=2x-2$, que está representado na figura mais à esquerda.

Mas será que o conhecimento de dois valores de uma função polinomial de grau superior nos permite determinar o respectivo polinómio? "Claro que não!", dirão os leitores. Por exemplo, tanto x^2-1 como x^3-x se anulam em 1 e em -1.



Gráficos de dois polinómios que partilham dois valores



Gráficos de dois polinómios que partilham três valores

Contudo... um dia a Ara e o Breu tiveram o seguinte diálogo.

Ara: Pensa num polinómio de coeficientes inteiros não negativos, de qualquer grau, mas não me digas nada sobre ele.

Breu: Hmmm, está bem. Já está.

Ara: Que valor toma para x=1?

Breu: 14.

Ara: Que valor toma para x=17?

Breu: Caramba, tenho de fazer contas... dá 1 236 696 894.

Ara: Pois bem, o teu polinómio é $3x^7+4x^5+5x^2+2$.

Breu: Está certo. Mas foi à sorte que adivinhaste! Dois valores não são suficientes para determinar um polinómio...

Ara: Acertarei sempre! Queres apostar?

Acontece que a Ara tem razão. Os leitores compreendem o seu *modus operandi*?

Sobre os problemas do número anterior:

1 – As moedas em fila podem ser numeradas de 1 a 100. A Ara pode calcular a soma das moedas de numeração par e das de ordem ímpar. É fácil escolher um desses conjuntos para si. Se o número for ímpar (como 101) e as moedas das extremidades originais tiverem valores pequenos, o Breu pode ganhar, pela mesma razão.

2 – Há somente um número par na lista. Sendo o quadrado de ordem par, as linhas em que o 2 ocorrer terão soma ímpar, ao contrário das outras.

3 – O número de casas negras é sempre ímpar.