por João Filipe Queiró
[Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra]

A Demanda do Centro de Portugal

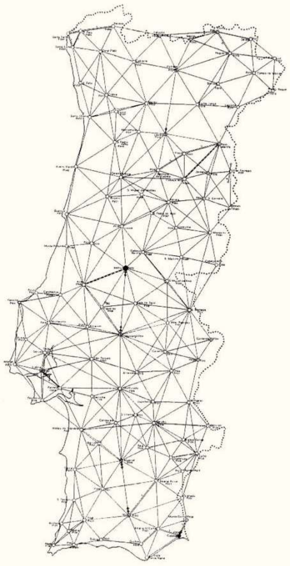
Onde fica o centro de Portugal? O que é o centro de Portugal? Uma incursão pelas aplicações da Matemática à Geografia e à Demografia.

Quando visitamos o Cabo da Roca, podemos adquirir um certificado atestando que estivemos no ponto mais ocidental da massa continental euro-asiática. A autarquia local, de forma imaginativa, consegue assim gerar algumas receitas, já que o serviço é popular entre os turistas.

Há muitos anos, quando estava na fila para obter a minha certidão de ocidentalidade, ocorreu-me a questão de procurar outros pontos que tivessem interesse exclusivamente por motivos geográficos. E lembrei-me de um candidato óbvio: o centro de Portugal.[1]

Surge logo a questão do que se deve entender por "centro" de uma figura irregular, sem simetrias. O centro de um círculo, de um rectângulo, de um losango, todos sabemos o que é. Mas como saber o que é o centro de uma figura como o mapa de Portugal? Já voltarei a esse assunto.

Nestas coisas não se inventa nada, e o tipo de problema que nos interessa já foi abordado noutros países. Para o caso de Portugal, encontrei uma publicação do Instituto Geográfico e Cadastral de 1983, onde vi o seguinte mapa, com a legenda "Rede geodésica primordial":



O nó central desta rede, visível a meio do mapa, está no Pico da Melriça, no concelho de Vila de Rei, distrito de Castelo Branco. Trata-se de uma elevação com 593 metros de altitude, no topo da qual se ergue um imponente marco geodésico.

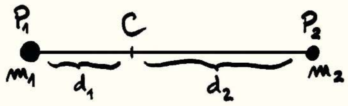
O Pico da Melriça é uma atracção turística, promovida nos materiais publicitários da Região de Turismo dos Templários como o "Centro Geodésico de Portugal". O seu valor simbólico é repetidamente utilizado em vários tipos de eventos, incluindo iniciativas partidárias em campanhas eleitorais.

Estará o nosso problema resolvido? Será o Pico da Melriça o centro de Portugal? Foi este o problema que estudei e o que venho aqui descrever são as minhas conclusões.

O ponto de partida tem de ser a definição de centro de uma figura plana[2]. O conceito que nos vai interessar é o de centro de gravidade, ou centro de massa, ou baricentro, ou centróide. Informalmente, trata-se do ponto em que, para efeitos de equilíbrio, podemos supor concentrada toda a massa da figura. A única hipótese que postulamos é a da "associatividade" do centro de gravidade: se dividirmos uma figura em várias partes, então o centro da figura total é o centro do conjunto dos centros das partes, supondo colocada em cada um desses pontos a massa da respectiva parte.

[1]Ao longo do artigo usarei a palavra Portugal para significar apenas o território continental, isto é, sem incluir as ilhas portuguesas no Atlântico. A inclusão das ilhas, algumas das quais são grandes, traria resultados muito diferentes.
[2]Poderíamos estudar a questão para figuras no espaço, não necessariamente planas, mas não o faremos neste artigo.

Começamos pela situação mais simples de todas: a figura constituída apenas por dois pontos P_1 e P_2, estando em cada um colocada uma massa. Chamemos m_1 e m_2, respectivamente, a essas massas.



Pelo chamado "princípio do equilíbrio de Arquimedes", o centro de gravidade deste sistema de dois pontos é o ponto C do segmento $[P_1,P_2]$ que satisfaz o seguinte: sendo d_1 e d_2 as distâncias de C a P_1 e P_2, respectivamente, deverá ter-se

$$m_1 d_1 = m_2 d_2.$$

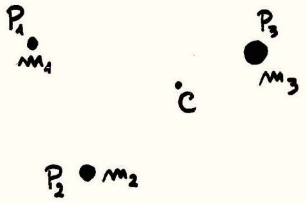
Se considerarmos um eixo que contenha o segmento $[P_1,P_2]$ e nesse eixo introduzirmos coordenadas, de forma que a de P_1 seja x_1, a de P_2 seja x_2 e a de C seja x_C, a condição fica

$$m_1(x_C - x_1) = m_2(x_2 - x_C).$$

Resolvendo esta equação, obtemos

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}.$$

Consideremos agora três pontos, P_1, P_2 e P_3, com massas m_1, m_2 e m_3, respectivamente. Fixemos um sistema de eixos no plano dos pontos e suponhamos que as coordenadas de P_1, P_2 e P_3 são, respectivamente, (x_1,y_1), (x_2,y_2) e (x_3,y_3). Para achar o centro de gravidade, C, deste sistema de três pontos com massas, podemos usar a associatividade acima referida: determinamos o centro do sistema formado por P_1 e P_2, colocamos aí a massa m_1+m_2, e depois determinamos o centro do novo sistema formado pelo ponto assim obtido e por P_3.



Facilmente se vê que as coordenadas de C são dadas por

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} \quad \text{e} \quad y_C = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Se em vez de três tivermos k pontos, $P_1, P_2, \ldots, P_k$, com coordenadas $(x_1,y_1), (x_2,y_2), \ldots, (x_k,y_k)$ e massas $m_1, m_2, \ldots, m_k$, um raciocínio análogo conduz-nos às seguintes fórmulas para as coordenadas do centro de gravidade desse sistema de pontos:

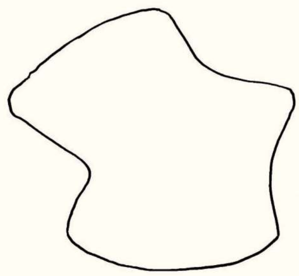
$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_k x_k}{m_1 + m_2 + \cdots + m_k} \quad \text{e} \quad y_C = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \cdots + m_k y_k}{m_1 + m_2 + \cdots + m_k}.$$

Se as massas $m_1, m_2, \ldots, m_k$ forem todas iguais, facilmente se vê que as fórmulas se simplificam para

$$x_C = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k} \quad \text{e} \quad y_C = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_k}{k},$$

Ou seja: no caso de as massas serem todas iguais, a localização do centro de gravidade não depende das massas mas apenas das posições dos pontos. E, nesse caso as coordenadas do centro são simplesmente as médias aritméticas das coordenadas dos pontos.

Passemos agora a figuras planas de outro tipo. Como achar o centro de gravidade de uma figura como a seguinte?

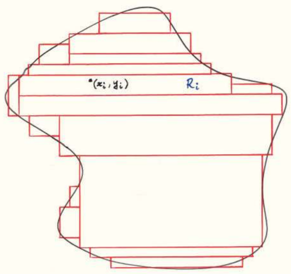


Pensamos nesta figura como uma placa plana R feita de um material cuja densidade pode variar de ponto para ponto. Uma ideia para determinar o centro é aproximar a figura dada usando rectângulos.

Fixando um sistema de eixos no plano da figura, a densidade é uma função real de duas variáveis reais $\delta(x,y)$. Aproximamos então a figura R pela reunião de um número finito de rectângulos R_i e em cada um deles escolhemos um ponto qualquer (x_i,y_i).

Claramente, uma aproximação para a massa do rectângulo R_i é dada por

$$\delta(x_i,y_i) \cdot \text{área de } R_i.$$



Colocando, para cada i, esta massa aproximada no ponto (x_i,y_i), obtemos um número finito de pontos com massas. O centro deste sistema de pontos é uma aproximação para o centro de gravidade, C, da figura R. Recordando as fórmulas vistas anteriormente, as coordenadas de C podem portanto ser aproximadas da seguinte forma:

$$x_C \approx \frac{\sum_i x_i \cdot \delta(x_i,y_i) \cdot \text{área de } R_i}{\sum_i \delta(x_i,y_i) \cdot \text{área de } R_i} \quad \text{e} \quad y_C \approx \frac{\sum_i y_i \cdot \delta(x_i,y_i) \cdot \text{área de } R_i}{\sum_i \delta(x_i,y_i) \cdot \text{área de } R_i}.$$

Se agora tomarmos rectângulos cada vez mais pequenos, vamos obtendo aproximações cada vez melhores. Fazendo o tamanho dos rectângulos tender para zero (uma forma de controlar isso é, por exemplo, olhando para a maior das diagonais dos rectângulos), obtemos, no limite, expressões exactas para as coordenadas do centro de gravidade da figura R:

$$x_C = \frac{\iint_R x\,\delta(x,y)\,dx\,dy}{\iint_R \delta(x,y)\,dx\,dy} \quad \text{e} \quad y_C = \frac{\iint_R y\,\delta(x,y)\,dx\,dy}{\iint_R \delta(x,y)\,dx\,dy}.$$

Note-se que o denominador de ambas as expressões, $\iint_R \delta(x,y)\,dx\,dy$, é a massa total da figura.

No caso de a densidade, $\delta(x,y)$, ser constante – isto é, de a placa ser homogénea – estas expressões simplificam-se para:

$$x_C = \frac{\iint_R x\,dx\,dy}{\iint_R dx\,dy} \quad \text{e} \quad y_C = \frac{\iint_R y\,dx\,dy}{\iint_R dx\,dy}.$$

Ou seja: no caso homogéneo, que é o que nos interessa, a localização do centro de gravidade não depende da densidade, mas apenas da forma da figura. O centro, neste caso, é portanto um ponto com uma caracterização apenas geométrica. Podemos notar que o denominador de ambas as expressões, $\iint_R dx\,dy$, é simplesmente a área da figura.

Para calcular estes integrais duplos recorremos a um teorema bem conhecido de Análise, que permite reduzir esse cálculo a outro envolvendo apenas a fronteira da figura *R*. Trata-se do teorema de Green, que afirma que, sendo *f* e *g* duas funções reais definidas numa região plana *R* com fronteira *fr*(*R*), se tem[3]

$$\iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\, dy \quad = \quad \int_{fr(R)} f\, dx \quad + \quad \int_{fr(R)} g\, dy.$$

(Os integrais que figuram no segundo membro são integrais curvilíneos.)

O teorema de Green pode ser imediatamente usado (e de mais que uma maneira, conforme as escolhas de *f* e *g*) para calcular os integrais duplos que nos interessam. Assim, temos, por exemplo, as seguintes expressões:

$$\text{área de } R = \iint_R 1\, dx\, dy = \int_{fr(R)} x\, dy = -\int_{fr(R)} y\, dx$$

$$\iint_R x\, dx\, dy = \frac{1}{2}\int_{fr(R)} x^2\, dy = -\int_{fr(R)} xy\, dx$$

$$\iint_R y\, dx\, dy = \int_{fr(R)} xy\, dy = -\frac{1}{2}\int_{fr(R)} y^2\, dx$$

Para cada um dos integrais duplos, temos aqui duas expressões com integrais curvilíneos. No cálculo aproximado que vamos fazer, usaremos, para cada um desses três integrais, a média aritmética dos dois integrais curvilíneos correspondentes, com a intenção de diminuir os erros cometidos na aproximação.

Usando a definição de integral curvilíneo como limite de somas, obtemos as seguintes aproximações para as coordenadas do centro da figura *R*:

$$x_C \approx \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{2}x_i^2(y_i - y_{i-1}) - x_i y_i (x_i - x_{i-1})\right]}{\sum_{i=1}^{n}\left[x_i(y_i - y_{i-1}) - y_i(x_i - x_{i-1})\right]}$$

$$y_C \approx \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[x_i y_i(y_i - y_{i-1}) - \frac{1}{2}x_i^2(x_i - x_{i-1})\right]}{\sum_{i=1}^{n}\left[x_i(y_i - y_{i-1}) - y_i(x_i - x_{i-1})\right]}$$

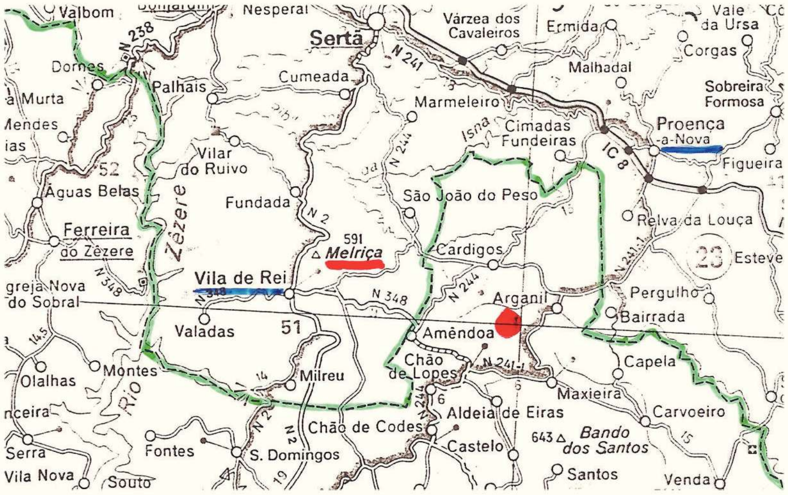
onde $(x_1,y_1), (x_2,y_2), \ldots, (x_n,y_n)$ são pontos da fronteira de *R*.

Antes de aplicar as fórmulas vistas à determinação do centro de Portugal, observemos que, como o país é muito pequeno relativamente ao perímetro da Terra, não há erro sensível em desprezar a esfericidade do globo terrestre e considerar o território plano.

Para realizar o cálculo usei o mapa de Portugal que encontrei na já referida publicação do Instituto Geográfico e Cadastral. Fotocopiei-o em papel milimétrico, de modo a dispor de um sistema de coordenadas. Registei as coordenadas de 762 pontos da fronteira da figura (isto é, da reunião das fronteiras terrestre e marítima do território continental de Portugal). Em seguida, utilizei as fórmulas anteriores com os pontos encontrados. O número elevado de pontos torna a aproximação razoável.

[3] Omitimos as condições exigidas a *f*, *g* e *R*, que supomos satisfeitas sem mais pormenores.

O resultado a que cheguei foi um ponto cerca de 11 km a leste e 3 km a sul do Pico da Melriça, a que podemos chamar centro geométrico ou geográfico de Portugal. Encontra-se entre as povoações de Arganil e Amêndoa, no concelho de Mação, distrito de Santarém.



Não sei se o interesse geográfico deste ponto se pode aproveitar para algum fim turístico. O exemplo de outros países sugere que não. A pequena cidade de Lebanon, Kansas, nos Estados Unidos, não conseguiu tirar grande partido do facto de se situar no centro geográfico do país.

*

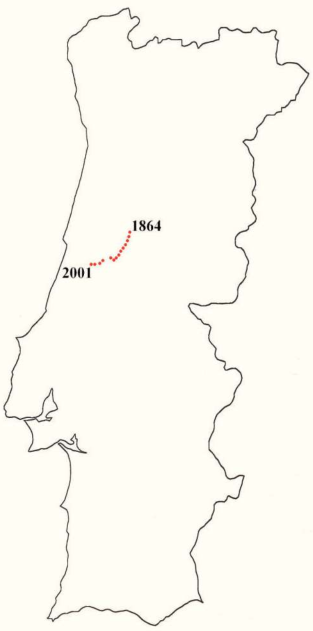
Depois de realizado o trabalho que descrevi, ocorreu-me outra noção possível de centro de Portugal, aquilo a que se pode chamar o centro de gravidade demográfico do país. A definição rigorosa seria o centro de gravidade do sistema de pontos constituído por todos os habitantes do território, cada um na sua posição (e todos com a mesma massa, o que torna a questão puramente geométrica). Como calcular tal ponto em cada momento seria obviamente impraticável, simplifiquei o problema considerando os 278 concelhos do continente e, para cada um deles, supondo a respectiva população concentrada na sede do concelho.

Note-se que, ao contrário do centro geográfico, o centro demográfico de Portugal não é fixo, porque a distribuição da população no território vai mudando com o tempo.

As fórmulas que utilizei foram as vistas no início para um conjunto finito de pontos com massas. Os pontos são as sedes dos concelhos, cujas coordenadas geográficas foi necessário registar. As massas são as populações dos concelhos, apuradas pelos recenseamentos oficiais.

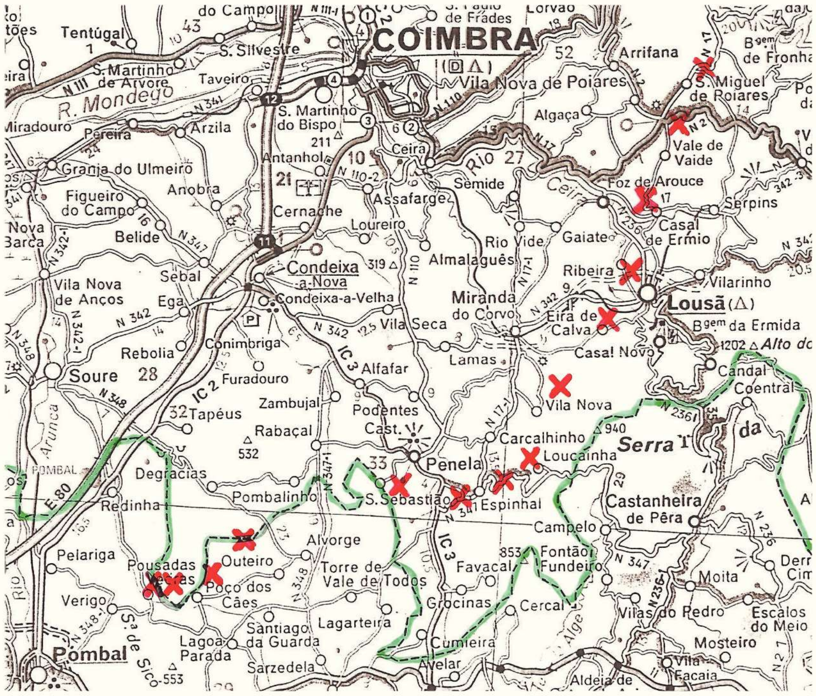
Fiz o cálculo do centro demográfico para os catorze recenseamentos realizados em Portugal desde o século XIX[4], nos anos de 1864, 1878, 1890, 1900, 1911, 1920, 1930, 1940, 1950, 1960, 1970, 1981, 1991 e 2001. O número de concelhos desde 1864 manteve-se bastante estável, o que facilitou as coisas. Os novos concelhos desde então são apenas o do Entroncamento (que aparece pela primeira vez no

[4] Agradeço a Luísa Saraiva, da Delegação de Coimbra do Instituto Nacional de Estatística, o empréstimo dos volumes com os dados populacionais, e à minha filha Luísa a grande ajuda na introdução desta enorme quantidade de dados numa folha de cálculo.



recenseamento de 1930), o da Amadora e o de Vendas Novas (1970), e os de Odivelas, da Trofa e de Vizela (2001).

O centro demográfico de Portugal encontrava-se, em 1864, perto de S. Miguel de Poiares, cerca de 17 km a leste de Coimbra. Depois moveu-se lentamente para sul e um pouco para oeste, até 1930, altura em que o movimento passou a ser para oeste. O salto mais pronunciado deu-se entre 1960 e 1970, o que corresponde sem dúvida à forte emigração que se verificou nessa década a partir dos meios rurais, nomeadamente do interior. Em 2001, o centro demográfico encontrava-se cerca de 30 km a Su-sudoeste de Coimbra, na fronteira entre os concelhos de Soure e Pombal.



À primeira vista, esta localização do centro demográfico de Portugal pode surpreender-nos. Contudo, ela explica-se pelo facto de a população de Portugal continental estar muito concentrada na faixa litoral entre Setúbal e Braga. É curioso que o centro demográfico de Portugal em 2001 esteja próximo do ponto médio do segmento que une essas duas cidades.

Os centros geográfico e demográfico de um país podem ter interesse político. Há países em que a capital é uma cidade escolhida algo artificialmente para ocupar um lugar geograficamente central: é o caso de Espanha. Noutros países a capital está muito longe do centro geográfico, parecendo óbvio que cresceu naturalmente onde a população estava concentrada (embora as causas e os efeitos por vezes se possam misturar): o Egipto é um bom exemplo.

Voltando ao centro demográfico de Portugal, será interessante ver onde se situará em 2011, ano do próximo recenseamento da população. É de admitir que não se mova muito em relação à posição de 2001: é difícil que se desloque ainda mais para oeste e, por outro lado, a região do Grande Porto é muito populosa, pelo que não deve haver grande deslocação do centro demográfico para sul. M