

O Esférico...

Caro leitor,

Este canto começou quando alguém perguntou a meio de uma partida de futebol da Académica de Coimbra o que era o esférico.

Realmente, é o objecto fundamental do jogo!

O objectivo de cada uma das equipas é introduzi-lo o maior número de vezes possível na baliza contrária, ainda que para tal seja preciso muito treino, trabalho de equipa, companheirismo, boas instalações, uma boa tática, um bom treinador... Pelo menos isto é o que ouvimos com insistência nos *media*.

Na altura a questão parecia despropositada, pois o jogo estava a decorrer, mas vendo bem o esférico é o foco de todos os olhares e desejos e sem ele este desporto, como tantos outros, não existiria.

No entanto, apesar de ser o objecto em redor do qual gravita toda a actividade no terreno de jogo, não lhe prestamos a atenção que merece. Vamos hoje observá-lo, mas de um ponto de vista que pode parecer estranho: vamos vê-lo com *olhos matemáticos*.

Sim, caro leitor, não se surpreenda. Nesse esférico que passou tantas vezes pelas suas mãos, que tantas alegrias e tristezas lhe proporcionou, há mais surpresas matemáticas do que possa imaginar.

Quando está bem cheio, parece uma esfera perfeita, o corpo ideal para os filósofos gregos, uma criação dos deuses. Mas será realmente uma esfera?

Olhe a figura 1 com atenção. Observe as peças que a compõem. São polígonos regulares, pois têm todos os lados iguais.



Figura 1

Efectivamente, são pentágonos e hexágonos unidos entre si. Se tiver pouco ar, pode ficar perfeitamente equilibrada sobre cada uma das suas faces...

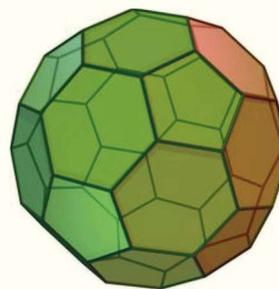


Figura 2

Sendo assim, deixa de ser uma esfera! Agora é um poliedro. Um poliedro que tem nome próprio, ainda que um tanto estranho: *icosaedro truncado* (cf. figura 2).



Figura 3

Vejam como desenhar a bola de futebol (ver figura 3): comece por um pentágono regular e adicione linhas que partam de cada uma das pontas do pentágono, que servirão para formar 5 hexágonos em torno do pentágono. Na confluência de cada par

de hexágonos, complete (com três linhas) um pentágono, ficando com seis pentágonos. Neste momento só temos de circunscrever uma circunferência e dar o toque final colorindo a preto os pentágonos.

Mas voltemos à estrutura do esférico, para contar o número de pentágonos e hexágonos que o compõem. Parece fácil? Já terminou? Bem... não se terá enganado? Os pentágonos não oferecem grande dificuldade; efectivamente, são 12.

Agora vamos contar os hexágonos... Talvez seja melhor pensar um pouco... Como vimos, cada pentágono está rodeado por cinco hexágonos; logo, deveríamos ter doze vezes cinco, isto é, sessenta hexágonos. Mas cada um deles está unido a três pentágonos diferentes. Nesse caso, temos sessenta a dividir por três, isto é, 20. Um total de 32 faces. Bom, não foi assim tão complicado.

Agora que começou a contar pode determinar quantas arestas (costuras) tem a bola? Um conselho: não tente contá-las uma a uma...

Se há 20 hexágonos e cada um tem 6 arestas, obtemos 120 arestas, mais 12 pentágonos por 5 arestas cada um, isto é 60. No total temos 180 arestas. Mas cuidado: cada aresta é comum a 2 polígonos. Assim, contamos cada aresta 2 vezes, logo, temos 90 arestas. Quem diria?

Agora que a curiosidade se apoderou de nós, determine quantos *vértices* (lugar geométrico onde as arestas confluem) tem a bola?

Para tal apliquemos um **teorema de Euler para poliedros**: Considere-se um poliedro com s faces, l arestas e p vértices, então, $s + p = l + 2$.

Para o demonstrar comece por demonstrar o **teorema de Euler no plano**: Dado um mapa qualquer, considere-se um número s de países, o número l de fronteiras e o número p dos vértices. Então, $s + p = l + 2$.

Para tal use indução sobre l . Coloque o poliedro no interior de uma esfera, de raio suficientemente grande, e projecte desde o seu centro (que está sem perda de generalidade no interior do poliedro) sobre a superfície esférica todos os pontos do poliedro. Ficamos com um mapa na superfície esférica. A figura assim desenhada pode projectar-se desde um ponto qualquer da esfera não pertencente ao mapa sobre o plano tangente à superfície esférica no ponto diametralmente oposto (projectão estereográfica, cf. figura 4). Aplicando o teorema de Euler no plano ao mapa resultante terminamos a demonstração.

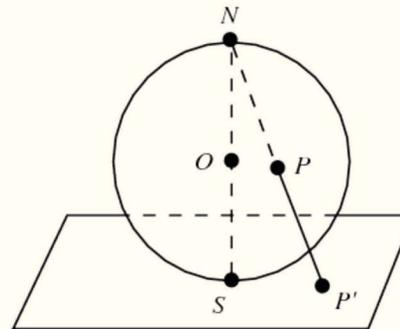


Figura 4

Vemos assim que há 60 vértices, pois $32 + 60 = 90 + 2$.

Decididamente, não devemos preocupar os nossos Figos e Ronaldos com estas questões.

Voltemos ao nosso esférico, isto é, ao icosaedro truncado.

Ainda que à primeira vista não pareça, este poliedro obtém-se cortando os 12 vértices de um icosaedro - um dos 5 poliedros regulares descobertos por Platão há mais de 2500 anos, formado por 20 triângulos equiláteros, de onde vem o seu nome. Os 12 pentágonos correspondem aos 12 cortes nos vértices do icosaedro e os 20 hexágonos constituem o resto das faces do icosaedro truncado.

A partir de agora queremos acompanhar o leitor na determinação do volume de 2 sólidos, a pirâmide e a esfera, e também na construção de um icosaedro.

Problema 1: Demonstre por indução sobre n que

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

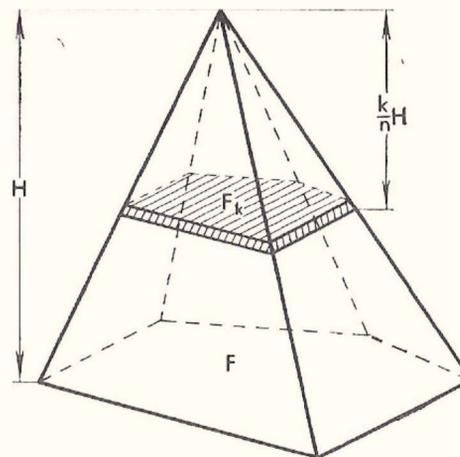


Figura 5

Problema 2: Considere-se uma pirâmide com altura H e área da base F (cf. figura 5).

a) Dividindo a altura em n partes iguais e traçando por elas planos paralelos ao plano da base, obtemos n prismas, V_k com altura $\frac{H}{n}$ (na verdade não temos

prismas, mas sim pirâmides truncadas), cuja união funciona como aproximação da pirâmide. Determine o volume dos prismas, V_k , em termos de n, k, H e F .

b) Atendendo a que o volume da pirâmide é dado aproximadamente pela soma dos volumes dos prismas, V_k , escreva essa aproximação em termos de n, F e H .

c) Tomando o limite, quando n tende para infinito, mostre que o volume da pirâmide é igual a $\frac{FH}{3}$.

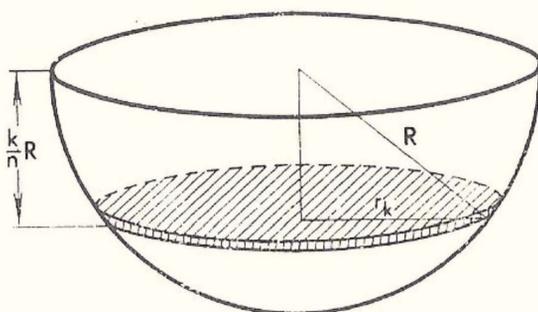


Figura 6

Problema 3: Considere-se a semi-esfera na figura 6, de raio R , dividida em n planos com espessura $\frac{R}{n}$, isto é, considere-se aproximada por n cilindros de altura $\frac{R}{n}$. Sendo o raio de cada um destes cilindros r_k

e utilizando a figura 4, mostre por um processo análogo ao do problema 2 que o volume da esfera é

$$\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Como aperitivo deixamos-lhe a construção do icosaedro a partir da sua planificação na figura 7. Na sua construção, use materiais transparentes,

considerando os triângulos equiláteros que o compõem de 6 centímetros de lado.

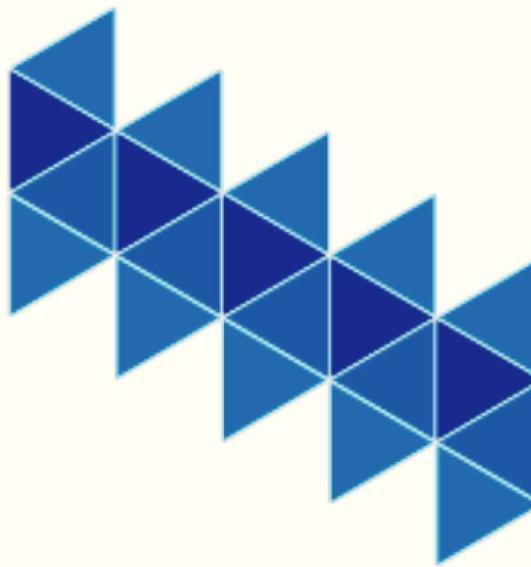


Figura 7

Problema 4: Ao terminar a construção do icosaedro, verá 12 pirâmides pentagonais. Cortando o icosaedro próximo dos vértices por planos paralelos às bases das pirâmides obtemos um icosaedro truncado. Determine o local onde o corte deve ser feito de modo a produzir hexágonos regulares.

Com a resolução destes quatro problemas, bem como com a dos problemas propostos no canto anterior, lançámos as bases para a resolução do problema maior, não trivial, que é comparar os volumes do icosaedro truncado com o da esfera que o circunscreve. Esperamos abordá-lo num próximo canto.

Envie as soluções para:

Projecto Delfos
Departamento de Matemática da FCTUC
Apartado 3008
EC Universidade
3001-454 COIMBRA