por **Luís Madureira**

[Antigo professor da Escola Secundária Padre António Vieira]

Os Jogos da "Sobreposição" e da "Mudança"

Alea jacta est! Os dados estão lançados. Os dados, os tetraedros, as moedas... Mas antes de os lançar convém avaliar as probabilidades de ganhar, não vão os novos jogos de azar que o casino nos propõe transformar-se em jogos de má-sorte para nós. É que "azar" provém de um étimo árabe que significa simplesmente "Acaso". Como diz J. Tiago de Oliveira, citando Howe, «A reasonable probability is the only certainty». (*Collected Works*, vol. II, p. 178, Pendor, 1995)

Um casino projecta implementar um novo jogo a que chamou "Jogo da Sobreposição". Consiste no seguinte: 3 moedas são lançadas 6 vezes consecutivas e contado o número k de vezes ($k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$) que as moedas apresentam a mesma face (número de sobreposições). Cada apostador recebe k euros.
Por exemplo — supondo as duas faces gravadas com "0" e "1" — se o resultado de um jogo fosse

0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	0

cada jogador receberia €2.

Quanto deve o casino cobrar por cada aposta para ter lucro?

Consideremos o problema na sua generalidade: são lançadas m moedas equilibradas n vezes consecutivas. Seja $X_{m,n}$ a variável aleatória que representa o valor k recebido pelo apostador, com $k = 0, 1, ..., n$. A função de probabilidade de $X_{m,n}$ é dada por[1].

$$P\left(X_{m,n} = k\right) = \frac{\left(2^{m-1} - 1\right)^{n-k} \cdot \binom{n}{k}}{2^{(m-1)n}} \quad (k = 0,1,\ldots,n)\ .$$

No exemplo apresentado ter-se-á $P\left(X_{3,6} = k\right) = \dfrac{3^{6-k} \cdot \binom{6}{k}}{2^{12}} \quad (k = 0,1,\ldots,6)$.

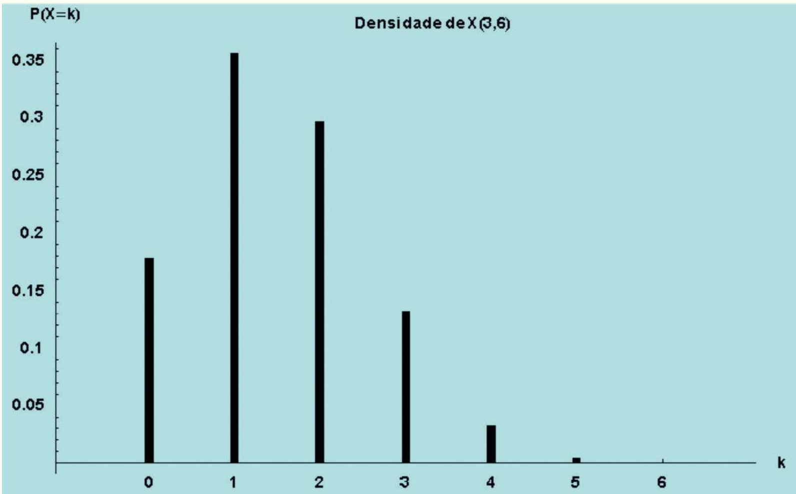
[1]Caso geral: se em vez de lançarmos moedas efectuarmos n lançamentos consecutivos de m poliedros regulares com f faces, tem-se

$$P\left(X_{m,n,f} = k\right) = \frac{\left(f^{m-1} - 1\right)^{n-k} \cdot \binom{n}{k}}{f^{(m-1)n}} \quad (k = 0,1,\ldots,n) \quad \text{e} \quad \mathrm{E}(X_{m,n,f}) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{\left(f^{m-1} - 1\right)^{n-k} \cdot \binom{n}{k}}{f^{(m-1)n}} = \frac{n}{f^{m-1}}$$

Distribuição de probabilidade do valor recebido por jogo

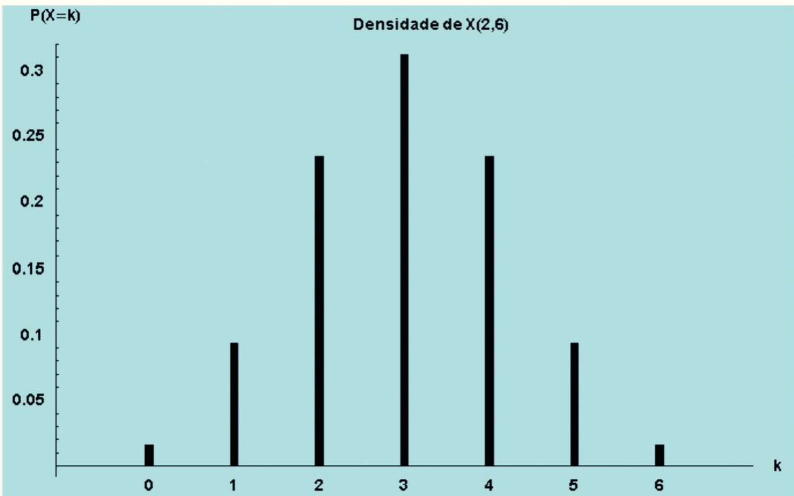
Valor recebido (k)	0	1	2	3	4	5	6
Probabilidade	0,177979	0,355957	0,296631	0,131836	0,032959	0,004395	0,000244

Gráfico de barras da distribuição:



Pode mostrar-se que $E(X_{m,n}) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{\left(2^{m-1}-1\right)^{n-k} \cdot \binom{n}{k}}{2^{(m-1)n}} = \frac{n}{2^{m-1}}$. Para o exemplo considerado tem-se $E(X_{3,6}) = 1{,}5$, pelo que o casino deve cobrar um valor superior a €1,5 por aposta. Por exemplo, €2 seria um valor aliciante para um jogador menos prevenido.

É interessante verificar que, para um dado n, $E(X_{m,n})$ é máxima — vale $n/2$ — quando apenas se jogam 2 moedas, tendo-se então uma distribuição de probabilidade simétrica. Vejamos o gráfico de barras de $X_{2,6}$:



Caderno_4
quarta-feira, 6 de Maio de 2009 13:30:01

Também é interessante notar que, considerando igual número de lançamentos, cada nova moeda introduzida reduz o valor esperado para metade.

Ao leitor interessado em realizar num computador experiências com valores superiores de m e n, sugere-se que o cálculo do número de "sobreposições" nas sequências seja feito do seguinte modo: represente por "0" e "1" os resultados do lançamento das n moedas; dadas as m sequências u, v, w,... com n elementos cada, determine o número de sobreposições $k = \sum_{i=1}^{n}(u_i \cdot v_i \cdot w_i \cdot \ldots) + \sum_{i=1}^{n}(u_i^c \cdot v_i^c \cdot w_i^c \cdot \ldots)$ em que u^c, v^c, w^c,... designam as sequências complementares de u, v, w,..., isto é, as que se obtêm substituindo "0" por "1" e "1" por "0".

Suponhamos agora que o casino pretende introduzir um segundo jogo a que chama "Jogo da Mudança". Como veremos, este jogo é bem menos aliciante — a sua apresentação visa apenas motivar desenvolvimentos posteriores.

Um dado é lançado 11 vezes consecutivas e conta-se o número, k, de vezes ($k \in \{0,1,2,\ldots,8,9,10\}$) que uma face é seguida de uma face diferente. Definamos "taxa de mudança" como a razão $\frac{k}{10}$. Cada apostador recebe 10 vezes o valor da "taxa de mudança". Quanto deve o casino cobrar por cada aposta para ter lucro no jogo?

Mostraremos que deve cobrar um valor superior a $10 \times \frac{5}{6}$ euros; por exemplo, €8,5 por aposta, o que proporcionaria ao casino um lucro médio por aposta inferior a 50 cêntimos, um resultado pouco estimulante, quer para o casino, quer para o apostador, que teria, no máximo, um lucro de €1,5 por aposta. Não será possível imaginar um "jogo da mudança" que gere mais entusiasmo? E se usássemos um dos outros quatro poliedros regulares? (No caso do tetraedro deveríamos analisar a mudança da face que fica em baixo, claro). Responderemos a esta questão mais adiante. Antes, porém, vejamos o caso do cubo.

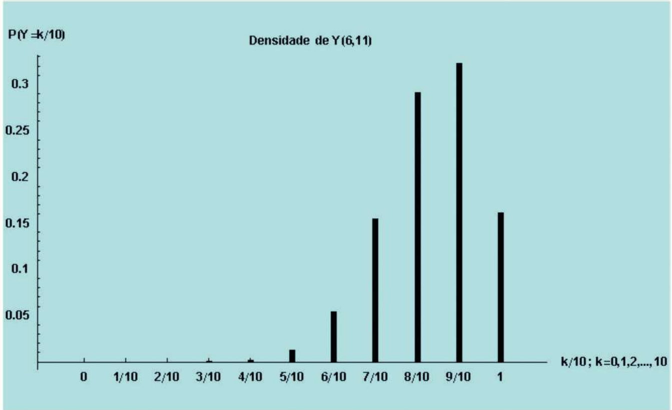
Seja $Y_{6,n}$ a variável aleatória que representa a "taxa de mudança" $\frac{k}{n-1}$ numa sequência de n lançamentos consecutivos de um dado (com $k=0,1,\ldots,n-1$). A função de probabilidade de $Y_{6,n}$ é dada por

$$P\left(Y_{6,n} = \frac{k}{n-1}\right) = \frac{5^k \cdot \binom{n-1}{k}}{6^{n-1}} \quad (k = 0,1,\ldots,n-1).$$

No caso de lançarmos o dado 11 vezes consecutivas, ter-se-á:

$$P\left(Y_{6,11} = \frac{k}{10}\right) = \frac{5^k \times \binom{10}{k}}{6^{10}} \quad (k = 0,1,\ldots,10).$$

Gráfico de barras correspondente:



Pode mostrar-se que $E(Y_{6,n}) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n-1} \cdot \frac{5^k \cdot \binom{n-1}{k}}{6^{n-1}} = \frac{5}{6}$. Supondo que o apostador recebe 10 vezes o valor da "taxa de mudança" observada, o casino deve cobrar pelo menos $10 \times \frac{5}{6}$ euros por cada aposta, tal como referimos.

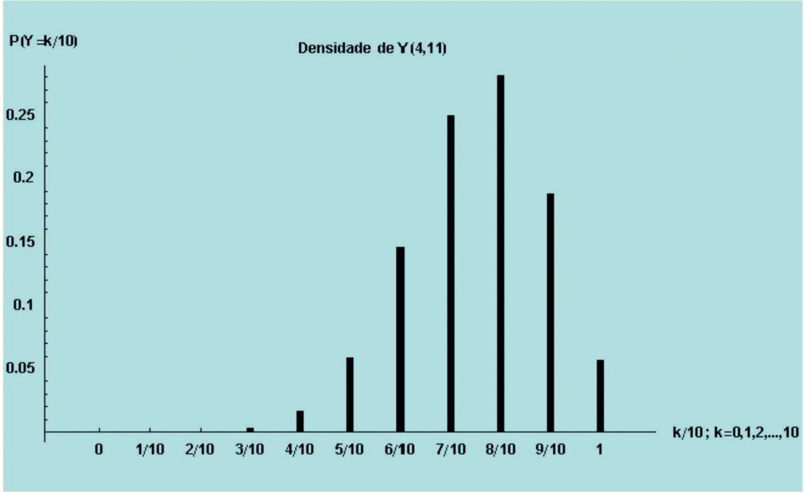
E se usássemos um dos outros poliedros regulares? É de prever que, quanto maior o número de faces do poliedro, mais assimétrica é a distribuição e portanto menos aliciante é o jogo. Vejamos então o que se passa com o tetraedro. Para isso, analisemos o caso geral. Seja $Y_{f,n}$ a variável aleatória que representa a "taxa de mudança" $\frac{k}{n-1}$ (com $k = 0, 1, \ldots, n-1$), numa sequência de n lançamentos consecutivos de um poliedro regular equilibrado de f faces.

A função de probabilidade de $Y_{f,n}$ é dada por

$$P\left(Y_{f,n} = \frac{k}{n-1}\right) = \frac{(f-1)^k}{f^{n-1}} \cdot \binom{n-1}{k} \text{ (com } k = 0, 1, \ldots, n-1), \qquad (1)$$

tendo-se $E(Y_{f,n}) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n-1} \cdot \frac{(f-1)^k}{f^{n-1}} \cdot \binom{n-1}{k} = \frac{f-1}{f}$.

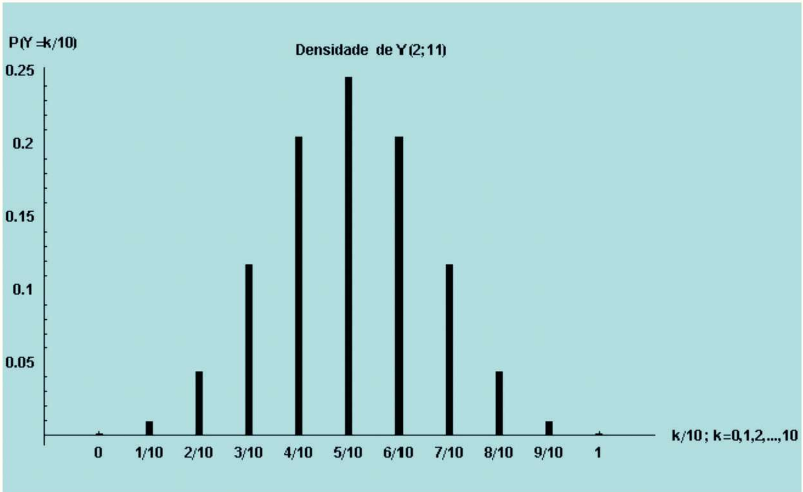
No caso de lançarmos um tetraedro 11 vezes consecutivas obtemos o seguinte gráfico de barras da distribuição:



A distribuição é notoriamente mais simétrica que no caso do dado: o grau de simetria varia inversamente com o número de faces do poliedro. Infelizmente não existem poliedros regulares com menos de quatro faces, pelo que o "Jogo da Mudança" mais aliciante que podemos imaginar é o que se joga com um tetraedro. Mas notemos um facto curioso: se atribuirmos a f o valor 2, obtemos um valor esperado da "taxa de mudança" igual a 0,5 — a simetria perfeita... O que é que se aproxima mais de um "poliedro" com duas faces? Talvez uma moeda. Se em (1) substituirmos f por 2, obtemos:

$$P\left(Y_{2,n} = \frac{k}{n-1}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \binom{n-1}{k} \text{ (com } k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

que é efectivamente a densidade da variável aleatória que representa a "taxa de mudança" numa sucessão de n lançamentos consecutivos de uma moeda equilibrada. Eis o gráfico de barras da distribuição de $Y_{2,11}$:



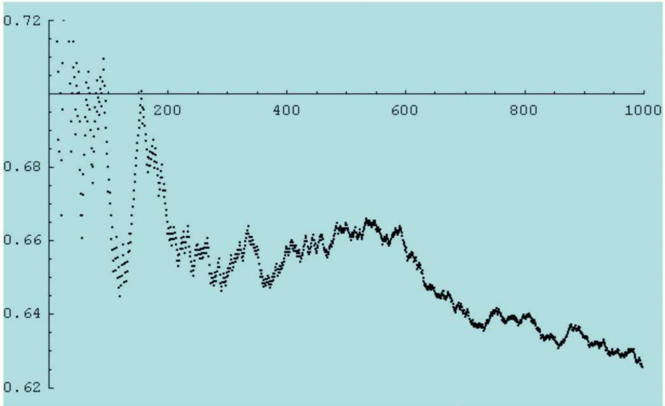
Em vez de moedas submetidas às leis do acaso, podemos analisar o comportamento — em termos de taxa de mudança — de "moedas" governadas por leis deterministicamente definidas. Por exemplo, a sequência de período 7 respeitante a uma "moeda" de faces "0" e "1" – (1,1,1,1,1,1,0) – cuja "taxa de mudança" tende para $\frac{2}{7}$ quando o número de "lançamentos" cresce indefinidamente. Refira-se que o limite da "taxa de mudança" noutras sequências com o mesmo período não é necessariamente igual a $\frac{2}{7}$, podendo apenas tomar dois outros valores — $\frac{4}{7}$ e $\frac{6}{7}$. É o caso, respectivamente, de (1,0,0,0,0,1,0) e de (1,0,1,0,1,0,0). Em geral, vale o seguinte teorema (em sequências bivalentes cujos termos, sem perda de generalidade, tomam os valores 0 ou 1):

A indefinida justaposição consecutiva de uma sequência de dimensão $n > 1$ e cuja "taxa de mudança", [i.e. n.° de mudanças/(n-1], é diferente de 0 produz uma sequência cuja "taxa de mudança" tende para $\frac{2k}{n}$, com $k = 1, 2, \ldots, C\left(\frac{n}{2}\right)$ (ou $k = 1, 2, \ldots, C\left(\frac{n}{2}\right) - 1$, no caso de n ser par e serem iguais o primeiro e último termo da sequência geradora). (Ver demonstração no Apêndice 1).

Uma consequência interessante deste resultado é a seguinte: de $\frac{2k}{n} = 0{,}5$ decorre $\frac{n}{k} = 4$, concluindo-se que apenas em sequências com período múltiplo de 4 pode o limite da "taxa de mudança" ser 0,5. Assim, se numa sequência deterministicamente gerada pudermos assegurar que o limite da "taxa de mudança" é 0,5, garantimos implicitamente que o seu período é múltiplo de 4. Para outros valores desse limite resultam em geral diferentes valores para o período. Por exemplo, se o limite da "taxa de mudança" de uma sequência for 0,8, podemos garantir que o seu período será múltiplo de 5.

De entre as sequências deterministicamente geradas há uma de particular interesse que diz respeito ao "lançamento" de uma "moeda" especial de faces "1" e "5", a que poderíamos chamar moeda *primal*. Referimo-nos à sucessão módulo 6 dos números primos (a partir do 3.° primo): 5, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 5, 1, 1, 5, 1, 5, 5, 1, 1, 5, 1, 1... Qual será o limite (se existir) da "taxa de mudança" desta sucessão?

Para os primeiros 1000 termos da sucessão, os valores da "taxa de mudança" variam entre 1 e 0,625626... e a sua evolução apresenta o seguinte aspecto gráfico:



Apesar das oscilações caóticas termo a termo, sugerimos num outro trabalho que é possível encontrar uma fórmula que se ajuste globalmente aos dados. A conjectura a que nos referimos, apoiada em considerável evidência experimental, materializa-se na seguinte expressão:

$$\text{"taxa de mudança" até ao } p\text{-ésimo primo} = 47{,}4 + \frac{1}{0{,}0678763 \cdot \ln(\ln(p)) - 0{,}0716475}$$

(com a "taxa de mudança" em percentagem).

No quadro seguinte apresentam-se alguns valores estimados pela expressão anterior:

P	"taxa de mudança" observada (%)	"taxa de mudança" estimada (%)	Erro relativo (%)
1 000 000	55,7914	55,7825	0,016
10 000 000	55,9242	55,9437	0,035
50 000 000	55,4929	55,4968	0,007
100 000 000	55,3318	55,3297	0,004
110 000 000	55,3097	55,3077	0,004
118 000 000	55,2909	55,2917	0,001

O ajustamento considerado sugere assim um limite da "taxa de mudança" na sucessão dos primos módulo 6 da ordem de 47%. O cálculo com maior número de termos poderia eventualmente confirmar ou infirmar esta conjectura; todavia, se notarmos que, de acordo com a referida conjectura, a taxa de 50% (por exemplo) seria alcançada com o primo de ordem aproximadamente igual a $4{,}6 \times 10^{360}$ (!), ficamos com uma ideia das avultadas dificuldades de computação que se colocam.

Contudo, tendo em conta que todos os pares de primos gémeos estão associados a "transições" 5→1 na sucessão[2] dos primos módulo 6 e o seu número parecer variar quase linearmente com o número de transições, o esclarecimento desta questão teria o interesse adicional de proporcionar alguma informação sobre a natureza exacta dessa relação quase linear. M

Bibliografia

[1] **G. Bhattacharyya** *et al.*,(1977). *Statistical Concepts and Methods*, Wiley.

[2] **A Mood** *et al.* ,(1974). *Introduction to the Theory of Statistics*, McGraw-Hill.

[3] http://mathworld.wolfram.com.

[2]Supondo gémeos os primos p_k e p_{k+1} tem-se: $p_{k+1} - p_k \equiv 2 \pmod 6 \Rightarrow p_k \equiv 5 \pmod 6 \wedge p_{k+1} \equiv 1 \pmod 6$.

Apêndice 1

A demonstração do Teorema recorre à seguinte propriedade: Em qualquer sequência bivalente $a_1, a_2, ..., a_n$ com mais de 2 termos (0 ou 1), o número de mudanças é dado por $m(n) = a_1 + a_n + 2\left(\sum_{k=2}^{n-1} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{k+1}\right)$. (Esta propriedade pode ser facilmente demonstrada por Indução).

Consideremos então uma sequência geradora com n termos. Tendo em conta a referida propriedade, o número de mudanças que nela podem ocorrer, no caso de serem iguais os seus primeiro e último termo, ou seja quando $a_1 = a_n$, é par para todo o n, já que $m(n) = 2a_1 + \dot{2}$. Dado que o Teorema exclui a possibilidade de ser nula a "taxa de mudança" nessa sequência, e portanto de ter-se $m(n) = 0$, concluímos que podem ocorrer 2, 4, 6, ..., n - 1 mudanças se n é ímpar ou 2, 4, 6, ..., n - 2 mudanças se n é par.

O número de mudanças em m sequências iguais justapostas consecutivamente é então:

$$2m, 4m, 6m, \ldots, \begin{cases} (n-1)m & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ (n-2)m & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

Assim, a "taxa de mudança" na m-sequência pode tomar os valores:

$$\frac{2m}{nm-1}, \frac{4m}{nm-1}, \frac{6m}{nm-1}, \ldots, \begin{cases} \dfrac{(n-1)m}{nm-1} & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ \dfrac{(n-2)m}{nm-1} & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

Quando $m \to \infty$, estas razões tendem para $\frac{2}{n}, \frac{4}{n}, \frac{6}{n}, \ldots, \begin{cases} \dfrac{n-1}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ \dfrac{n-2}{n} & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$

Os limites são pois da forma $\frac{2k}{n}$ com $k = 1, 2, 3, \ldots, \begin{cases} \dfrac{n-1}{2} & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ \dfrac{n-2}{2} & \text{se } n \text{ é par,} \end{cases}$ ou, se se quiser, da forma $\frac{2k}{n}$ com $k = 1, 2, 3, \ldots, \begin{cases} C\left(\dfrac{n}{2}\right) & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ C\left(\dfrac{n}{2}\right) - 1 & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$

No caso de serem diferentes o primeiro e último termo da sequência geradora, o número de mudanças que nela podem ocorrer é $1, 3, 5, \ldots, \begin{cases} n-2 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ n-1 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$, pois se $a_1 \neq a_n$, então $a_1 + a_n = 1$, pelo que $m(n) = a_1 + a_n + \dot{2}$ é ímpar para todo o n.

O número de mudanças em m sequências iguais justapostas consecutivamente é (há que contar agora as mudanças entre sequências consecutivas):

$$2m-1, 4m-1, 6m-1, \ldots, \begin{cases} (n-1)m-1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ nm-1 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Assim, a "taxa de mudança" na m-sequência pode tomar os valores:

$$\frac{2m-1}{nm-1}, \frac{4m-1}{nm-1}, \frac{6m-1}{nm-1}, \ldots, \begin{cases} \dfrac{(n-1)m-1}{nm-1} & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ 1 & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

Quando $m \to \infty$, estas razões tendem para $\frac{2}{n}, \frac{4}{n}, \frac{6}{n}, \ldots, \begin{cases} \frac{n-1}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ 1 & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$

Os limites são pois da forma $\frac{2k}{n}$, com $k = 1, 2, 3, \ldots, \begin{cases} \frac{n-1}{2} & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ é par,} \end{cases}$ ou, se se quiser, da forma $\frac{2k}{n}$ com $k = 1, 2, 3, \ldots, C\left(\frac{n}{2}\right)$.

Para a demonstração ficar completa, e dado que a propriedade em que nos apoiámos supõe que a sequência geradora tem mais de 2 termos, basta comprovar que nas sequências (0,1) e (1,0) o limite da taxa de mudança (=1) é da forma $\frac{2k}{n}$ com $k = 1, 2, 3, \ldots, C\left(\frac{n}{2}\right)$, o que é imediato.

Caderno_4
quarta-feira, 6 de Maio de 2009 13:30:21