por **Luís Madureira**
[Antigo professor da Escola Secundária Padre António Vieira]

Os Jogos da "Sobreposição" e da "Mudança" com Moedas Não-Equilibradas

Quantas coincidências são de esperar no lançamento simultâneo de duas ou mais moedas não-equilibradas? E no lançamento consecutivo de uma moeda não-equilibrada, quantas mudanças de face ocorrerão e qual a sua distribuição de probabilidade? O artigo debruça-se sobre este tipo de questões e propõe respostas algo inesperadas.

Suponha-se, a título de exemplo, que em certa escola existem 10 turmas com 20 alunos cada, dos quais 10 são rapazes e 10 são raparigas. Em cada turma, metade das raparigas tem olhos azuis e metade tem olhos negros; quanto aos rapazes, nada se sabe sobre o número (que pode variar de turma para turma) dos que têm olhos azuis e negros.

Constituem-se aleatoriamente 10 pares (rapaz-rapariga) por turma e conta-se o número de casais com igual cor de olhos.

Quantos destes casais existirão nas 10 turmas?

Cerca de 50, isto é, metade do número de casais que se podem constituir[1]. Esta estimativa, apesar da sua inevitável imprecisão, não deixa de ser algo surpreendente, tendo em conta que nada se sabe sobre o número de rapazes com olhos azuis ou negros em cada turma, e pode ser generalizada através do teorema que adiante enunciaremos. Para esse efeito, reformulemos o "Jogo da Sobreposição" no contexto de moedas não-equilibradas.

Lançam-se três moedas não-equilibradas, seis vezes consecutivas, e conta-se o número k de vezes, com $k \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$, em que as três moedas apresentam a mesma face (número de sobreposições ou coincidências), recebendo cada apostador k euros. Quanto deve um casino cobrar por aposta para ter lucro?

[1]Sublinhe-se que não é possível estimar o *número de casais com olhos azuis* e o *número de casais com olhos negros* em cada turma, a menos que se conheçam simultaneamente as probabilidades p_1 de os rapazes terem olhos azuis e p_2 de as raparigas terem olhos azuis, tendo-se então, respectivamente, np_1p_2 e $n(1-p_1)(1-p_2)$, onde n representa o número de rapazes da turma (igual ao número de raparigas).
No entanto, no caso de $p_2 = 0{,}5$, é possível estimar o número total de casais com olhos da mesma cor após o primeiro emparelhamento aleatório, ainda que se ignore o valor de p_1: $np_1p_2 + n(1-p_1)(1-p_2) = \frac{n}{2}$
Podemos imaginar a seguinte experiência:
Se, retirados os casais entretanto formados, repetirmos sucessivamente o emparelhamento aleatório dos elementos que restam até que seja possível constituir novos casais, concluímos que, no total, se formarão em cada turma (considerando agora p_2 qualquer):
np_1 *casais com olhos azuis e* $n(1-p_2)$ *casais com olhos negros quando* $p_1 \leq p_2$ e
np_2 *casais com olhos azuis e* $n(1-p_1)$ *casais com olhos negros quando* $p_1 > p_2$.
Note-se que o valor limite deste processo de emparelhamentos aleatórios sucessivos coincide com o que seria obtido num único passo, se rapazes e raparigas utilizassem a percepção visual na escolha intencional e determinística de um companheiro com idêntica cor de olhos.

Representemos por p_1, p_2 e p_3 as probabilidades de ocorrência de uma determinada face das três moedas e seja X a variável aleatória que representa o valor k recebido pelo apostador.

A função de probabilidade de X é dada por:

$$P(X=k)=\binom{6}{k}\cdot\left(\prod_{j=1}^{3}p_j+\prod_{j=1}^{3}(1-p_j)\right)^{k}\cdot\left(1-\prod_{j=1}^{3}p_j-\prod_{j=1}^{3}(1-p_j)\right)^{6-k} \quad (1)$$

tendo-se, como valor esperado,

$E(X)=6\cdot\left(\prod_{j=1}^{3}p_j+\prod_{j=1}^{3}(1-p_j)\right)=6\cdot(1-p_1-p_2-p_3+p_1p_2+p_1p_3+p_2p_3)$, pelo que, para ter lucro, o casino deve cobrar um valor superior a $E(X)$.

As expressões precedentes podem ser generalizadas a qualquer número de moedas e de lançamentos[2].

Tendo em conta os resultados apresentados em [1], se considerarmos equilibradas as três moedas, obtemos $P(X=k)=\dfrac{\binom{6}{k}\cdot 3^{6-k}}{4^6}$ e, portanto, é esta a distribuição de probabilidade do valor recebido por jogo (com $p_1=p_2=p_3=0{,}5$):

Valor recebido (k)	0	1	2	3	4	5	6
Probabilidade	0,177979	0,355957	0,296631	0,131836	0,032959	0,004395	0,000244

O correspondente valor esperado de X é $E(X)=6\cdot\dfrac{1}{4}=1{,}5$.

Que acontecerá se substituirmos uma (e apenas uma) das moedas anteriores por uma moeda não-equilibrada?

Suponhamos $p_1\neq 0{,}5$ e $p_2=p_3=0{,}5$. Após substituição em (1) e simplificação, obtém-se, como anteriormente,

$P(X=k)=\dfrac{\binom{6}{k}\cdot 3^{6-k}}{4^6}$, concluindo-se assim que a substituição de uma moeda equilibrada por uma não-equilibrada em nada alterou a distribuição de probabilidade do valor recebido por jogo. Ou seja, no "Jogo da Sobreposição" pode utilizar-se indiferentemente três moedas equilibradas ou apenas duas moedas equilibradas de entre essas três, sendo então irrelevante a natureza da terceira moeda! É até possível dar-se o caso de esta moeda apresentar sempre a mesma face, o que não significa, obviamente, que ela possa retirar-se do jogo, facto que se reconhece de imediato considerando um jogo com duas moedas, uma equilibrada e outra totalmente viciada, já que a eliminação da moeda viciada implicaria a impossibilidade de jogar.

E se jogarmos agora com duas moedas não-equilibradas?

Consideremos então $p_1\neq 0{,}5\wedge p_2\neq 0{,}5\wedge p_3=0{,}5$ e determinemos o valor esperado $E(X)=6(0{,}5-0{,}5(p_1+p_2)+p_1p_2)$. Poderá $E(X)$ valer 1,5 com $p_1\neq 0{,}5\wedge p_2\neq 0{,}5$?

Verifica-se que tal não é possível, uma vez que, sendo $p_3=0{,}5$, $E(X)=1{,}5 \Leftrightarrow (p_1=0{,}5\wedge p_2 \text{ qualquer})\vee(p_1 \text{ qualquer}\wedge p_2=0{,}5)$.

[2]Sejam $p_1, p_2, \ldots, p_m$ as probabilidades de ocorrência de determinada face em m moedas que se lançam simultaneamente n vezes consecutivas. Então:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot\left(\prod_{j=1}^{m}p_j+\prod_{j=1}^{m}(1-p_j)\right)^{k}\cdot\left(1-\prod_{j=1}^{m}p_j-\prod_{j=1}^{m}(1-p_j)\right)^{n-k} \quad (k=0,1,\ldots,n) \quad (2)$$

tendo-se $E(X)=n\cdot\left(\prod_{j=1}^{m}p_j+\prod_{j=1}^{m}(1-p_j)\right)$

Facilmente se verifica que estas equações são ainda válidas para moedas equilibradas, considerando para o efeito $p_j=\dfrac{1}{2}, \forall j$. Obtêm-se, nesse caso, as expressões apresentadas em [1].

Será oportuno sublinhar que pode obter-se $E(X) = 1{,}5$ com três moedas não-equilibradas: um exemplo, entre muitos, $-p_1 = 0{,}46$; $p_2 = 0{,}46$ e $p_3 = 0{,}52$.

Os resultados a que chegámos sugerem o seguinte teorema (que podemos designar “Insensibilidade ao desvio do equilíbrio”):

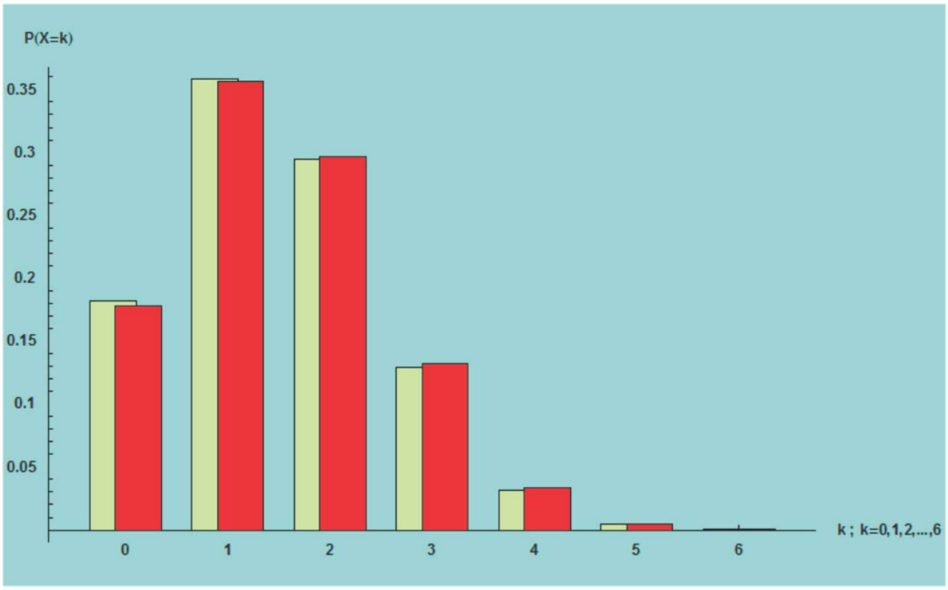
A distribuição de probabilidade do número de sobreposições no lançamento simultâneo de duas ou mais moedas equilibradas não se altera se substituirmos uma delas (e apenas uma), por uma qualquer moeda não-equilibrada.

A respectiva demonstração é apresentada em nota de rodapé[3].

Um caso particular em que se torna evidente este teorema é o de se jogarem duas moedas, das quais uma é equilibrada e a outra apresenta sempre a mesma face.

Uma outra conclusão inesperada a respeito deste jogo é a seguinte: o nosso hipotético casino nada tem a recear quanto a um ligeiro desequilíbrio das três moedas utilizadas; na verdade, até pode lucrar com isso![4] Vejamos porquê.

Admitamos que a probabilidade de sair determinada face em cada uma das três moedas se situa no intervalo [0,45; 0,55] e determinemos o valor de $E(X) = 6 \cdot (1 - p_1 - p_2 - p_3 + p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3)$ para as possíveis 64.478.185 combinações de valores de p_1, p_2 e p_3 que conduzem a $E(X) \neq 1{,}5$ obtidas para sucessivos incrementos de 0,00025, o que dá uma razoável estimativa das probabilidades envolvidas. Verifica-se que cerca de 59,67% das combinações geram valores de $E(X)$ inferiores a 1,5 (o valor esperado para o caso da distribuição “equilibrada”), pelo que o casino tem quase 60% de probabilidades (estimadas) de obter um lucro adicional se utilizar moedas ligeiramente desequilibradas. Uma das combinações que produz lucro adicional (€0,015) é a seguinte: $p_1 = 0{,}45$; $p_2 = 0{,}55$ e $p_3 = 0{,}47$. No gráfico seguinte comparam-se as distribuições de probabilidade do valor recebido por jogo para os valores de p_i referidos (a amarelo) e para três moedas equilibradas (a vermelho):



[3]Das m moedas, uma é "viciada", com probabilidade $p \neq 0{,}5$ de apresentar determinada face, e as restantes são equilibradas.

Substituindo os m-1 valores $p_j = \frac{1}{2}$ em (2), (ver nota 2), e após simplificação, obtemos uma expressão da função de probabilidade, independente de p, e que coincide com a distribuição de probabilidade correspondente ao jogo com m moedas equilibradas.

[4]Tal já não ocorreria se o jogo se realizasse com duas moedas, ambas não-equilibradas, uma vez que a probabilidade de obter lucro adicional seria igual a 50%.

Suponhamos agora que o casino pretende introduzir um segundo jogo a que chama "Jogo da Mudança".

Uma moeda é lançada 11 vezes consecutivas e conta-se o número k de vezes, com $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 8, 9, 10\}$, em que uma face é seguida de outra face diferente. Definamos “taxa de mudança” como a razão $\frac{k}{10}$. Cada apostador recebe dez vezes o valor da “taxa de mudança”. Quanto deve o casino cobrar por cada aposta para ter lucro no jogo?

Supondo a moeda equilibrada e tendo em conta as fórmulas apresentadas em [1], pode concluir-se que deve cobrar um valor superior a $10 \times \frac{1}{2} = 5$ euros.

E se a moeda não for equilibrada? A função de probabilidade da variável aleatória Y que representa a “taxa de mudança” $\frac{k}{n-1}$ (com $k = 0, 1, \ldots, n-1$), numa sequência de $n \geq 2$ lançamentos consecutivos de uma moeda não-equilibrada cujas faces ocorrem com probabilidades p e $1-p \neq p$, é a seguinte:

$$P\left(Y=\frac{k}{n-1}\right)=\begin{cases} 2\cdot\displaystyle\sum_{j=\frac{k+1}{2}}^{n-\frac{k+1}{2}}\binom{j-1}{j-\frac{k+1}{2}}\cdot\binom{n-j-1}{n-j-\frac{k+1}{2}}\cdot p^{n-j}(1-p)^{j} & \text{se } k \text{ ímpar}\\ \displaystyle\sum_{j=\frac{k}{2}}^{n-\frac{k}{2}}\left[\binom{j-1}{j-\frac{k}{2}}\cdot\binom{n-j-1}{n-j-1-\frac{k}{2}}+\binom{j-1}{j-1-\frac{k}{2}}\cdot\binom{n-j-1}{n-j-\frac{k}{2}}\right]\cdot p^{n-j}(1-p)^{j} & \text{se } k \text{ par}\end{cases}$$

$(k = 0, 1, \ldots, n-1)$

A dedução desta fórmula, elaborada pelo *referee* com base numa ideia sugerida por Manuel Silva, da Universidade Nova de Lisboa, encontra-se no Anexo 1.

Uma notável propriedade da função de probabilidade da variável aleatória Y é a que se enuncia no seguinte teorema[5] (que designamos por “Predominância das mudanças pares”):

No lançamento repetido de uma moeda em que determinada face tem probabilidade p de ocorrer, a soma 1-2p(1-p) das probabilidades de ocorrerem “taxas de mudança” correspondentes a um número par de mudanças é, à excepção da moeda equilibrada em que se verifica a igualdade, sempre superior à soma 2p(1-p) das probabilidades de ocorrerem “taxas de

[5] Para demonstrar o teorema, basta mostrar que a soma das probabilidades de ocorrerem “taxas de mudança” correspondentes a um número par de mudanças é igual a $1-2p(1-p)$.

Considerando n par, é possível estabelecer, com o apoio do Mathematica, que:

$$\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}\left(\sum_{j=k}^{n-k}\left[\binom{j-1}{j-k}\cdot\binom{n-j-1}{n-j-1-k}+\binom{j-1}{j-1-k}\cdot\binom{n-j-1}{n-j-k}\right]\cdot p^{n-j}(1-p)^{j}\right)=1-2\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n-2}{k-1}\cdot p^{k}(1-p)^{n-k}$$

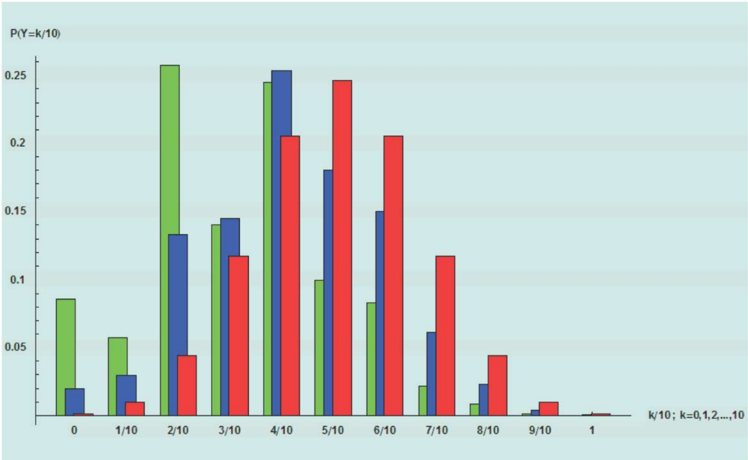
Analogamente, considerando n ímpar, pode-se mostrar que:

$$\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\left(\sum_{j=k}^{n-k}\left[\binom{j-1}{j-k}\cdot\binom{n-j-1}{n-j-1-k}+\binom{j-1}{j-1-k}\cdot\binom{n-j-1}{n-j-k}\right]\cdot p^{n-j}(1-p)^{j}\right)=1-2\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n-2}{k-1}\cdot p^{k}(1-p)^{n-k}$$

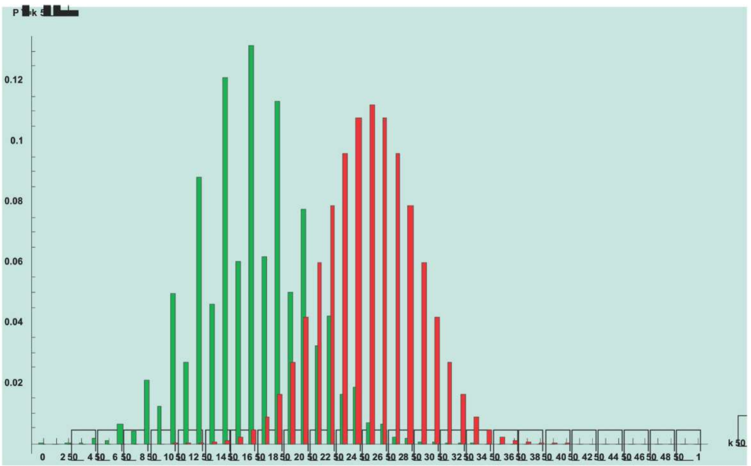
Ora, $\sum_{k=0}^{n}\binom{n-2}{k-1}\cdot p^{k}(1-p)^{n-k}=p(1-p)$, pelo que a soma das probabilidades de ocorrerem “taxas de mudança” correspondentes a um número par de mudanças é igual a $1-2p(1-p)$.

mudança” correspondentes a um número ímpar de mudanças, sendo a diferença entre ambas tanto maior quanto mais longe do equilíbrio estiver a moeda, ou seja, quanto mais se aproximar p de 0 ou de 1[6].

Vejamos uma ilustração para duas moedas em que $p = 0{,}2$ (moeda “verde”), e $p = 0{,}3$ (moeda “azul”), em comparação com uma moeda equilibrada (moeda “vermelha”):



Se considerarmos um maior número de lançamentos, a propriedade torna-se ainda mais perceptível. Vejamos o gráfico correspondente a 51 lançamentos, desta vez com omissão da moeda “azul” ($p=0{,}3$):



[6]Se o leitor tiver curiosidade (e paciência...) em verificar fisicamente este resultado pode “fabricar” uma moeda não-equilibrada com um dado equilibrado, fazendo corresponder, por exemplo, a face “1” do dado a “1” e as restantes a “0”.

Obtém assim uma “moeda” $\frac{1}{6}//\frac{5}{6}$ para a qual $1 - 2p(1-p) = 0{,}7(2)$ é mais do dobro de $2p(1-p)$, o que torna o efeito bastante pronunciado.
Considerando seis lançamentos consecutivos dessa “moeda”, tem-se a seguinte tabela:

Distribuição de probabilidade da “taxa de mudança”

Taxa de mudança $\left(\frac{k}{5}\right)$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1
Probabilidade	0,334919	0,167395	0,334791	0,105024	0,052512	0,00535837

Claro que a simulação em computador (com o apoio do Mathematica mais uma vez) permite realizar dezenas de milhares de provas repetidas em alguns minutos e verificar experimentalmente estes resultados de forma expedita.

O valor esperado de Y é $E(Y) = 2p(1\text{-}p)$, expressão[7] que toma o valor máximo 0,5 para $p = 0{,}5$. No caso da moeda "verde", $E(Y) = 2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}32$, o que significa que se o casino utilizasse essa moeda, deveria cobrar um valor ligeiramente superior a €3,2 mas ainda assim inferior, em princípio, ao que cobraria no caso da moeda equilibrada (pouco mais de €5).

Naturalmente, no caso de uma moeda muito imperfeita qualquer jogador se aperceberá rapidamente de que algo de anormal se passa e sentir-se-á prejudicado se o casino lhe cobrar o valor correspondente ao jogo com a moeda equilibrada. Contudo, se a moeda for apenas ligeiramente não-equilibrada (o que, em contrapartida, tornará também mais ligeiro o lucro adicional do casino), dificilmente alguém detectará a diferença: vendo bem, até uma moeda perfeitamente equilibrada pode ter um comportamento "estranho" em alguns jogos.

No jogo da "Mudança" torna-se assim ainda mais evidente o que já se referiu em relação ao jogo da "Sobreposição": não existe qualquer razão para o casino se preocupar com o não-equilíbrio das moedas que utiliza – só tem a ganhar com isso. M

Agradecimentos

Agradeço ao *referee* as recomendações no sentido de melhorar a legibilidade do texto e corrigir defeitos do mesmo. Agradeço, muito especialmente, por ter-me facultado a dedução da expressão da função de probabilidade da variável aleatória que representa a "taxa de mudança", constante da nota 5.

Referências

[1] **Madureira, L.** (2009) "Os jogos da «Sobreposição» e da «Mudança»" – *Gazeta de Matemática*, 157.

Anexo 1

Teremos de considerar dois casos: o caso em que o número de mudanças é par e o caso em que o número de mudanças é ímpar.

Vamos organizar a sequência de 0's e 1's da seguinte forma: [0 ... 0] [1 ... 1] ... [0 ... 0] [1 ... 1]

onde [0...0] e [1...1] representam blocos de 0's e 1's, respectivamente, constituídos por um ou mais elementos.

1) *k* ímpar:

Se k é ímpar significa que teremos $\frac{k+1}{2}$ blocos de 0's e o mesmo número de blocos de 1's na sequência de 0's e 1's . O número de sequências com k (ímpar) mudanças não difere se começarmos com um bloco de 0's ou com um bloco de 1's, pelo que basta ter em conta um dos casos e multiplicar por 2 para obter o resultado final.

Observações:

- O número mínimo de 0's e de 1's terá de ser $\frac{k+1}{2}$, o que significa que teremos, no máximo, $n - \frac{k+1}{2}$ 0's.
- Para os diferentes valores de j tal que $\frac{k+1}{2} \le j \le n - \frac{k+1}{2}$, temos necessariamente uma organização distinta,

[7] $2p(1\text{-}p)$ é a expressão simplificada de $1 - \sum_{i=1}^{2} p_i^2$ em que p_i designa a probabilidade da face i, considerando $p_1 = p$ e $p_2 = 1 - p$. Em geral, no lançamento de um poliedro com f faces, tem-se $E(Y) = 1 - \sum_{i=1}^{f} p_i^2$, quantidade que toma o valor máximo $\frac{f-1}{f}$ para $p_i = \frac{1}{f}, \forall i$ (na condição de que $\sum_{i=1}^{f} p_i = 1$).

[8] Virá a propósito sugerir uma visita ao site http://www.random.org/ que reclama a geração de números verdadeiramente aleatórios.

sendo possível para cada j contar o número de sequências com k mudanças e contendo j 0's.

- O número de sequências distintas começando com um bloco de 0's será obtido pela soma do número de sequências fazendo variar j de $\frac{k+1}{2}$ a $n-\frac{k+1}{2}$.

- Em cada bloco de 0's temos de fixar um 0, podendo os restantes pertencer a qualquer bloco. Assim, com j, número de 0's na sequência, temos $j-\frac{k+1}{2}$ 0's que podem ser distribuídos por qualquer um dos $\frac{k+1}{2}$ blocos de 0's, podendo haver repetições de blocos. O raciocínio é idêntico se atribuirmos os blocos aos $j-\frac{k+1}{2}$ 0's, podendo-se repetir blocos.

- Quando a ordem não importa mas cada objecto pode ser escolhido mais de uma vez, o número de combinações vale $\binom{m+r-1}{r}$ onde m é o total de elementos e r é o número de elementos escolhidos. Para este problema, $r=j-\frac{k+1}{2}$, correspondendo ao número de 0's que podem pertencer a qualquer bloco, e $m=\frac{k+1}{2}$, número de blocos com 0's que podem ser repetidos, pelo que o número de combinações é $\binom{j-1}{j-\frac{k+1}{2}}$.

- Se pensarmos apenas na colocação de 1's, o raciocínio é análogo, ou seja, havendo j 0's na sequência, terá de haver n-j 1's dos quais $\frac{k+1}{2}$ são fixados para garantir a existência dos $\frac{k+1}{2}$ blocos de 1's. Assim temos $\frac{k+1}{2}$ blocos a serem escolhidos para receber os $n-j-\frac{k+1}{2}$ 1's, podendo haver repetição. Para obter o número de combinações basta considerar combinações com repetição de elementos fazendo $m=\frac{k+1}{2}$ e $r=n-j-\frac{k+1}{2}$, ou seja, $\binom{m+r-1}{r}=\binom{n-j-1}{n-j-\frac{k+1}{2}}$.

- O produto das combinações que aparecem na expressão da função de probabilidade de Y, para k ímpar, resulta do facto de termos para cada combinação de 0's na sequência geral sempre o mesmo número de combinações distintas de 1's.

- Se fixarmos uma sequência com j 0's e consequentemente n-j 1's, então a probabilidade de se verificar esta combinação é $p^{n-j}(1-p)^j$.

Com este conjunto de observações fica concluído o raciocínio que permite validar a expressão no caso em que k é ímpar.

2) *k* par:

Neste caso o raciocínio é análogo se considerarmos duas situações distintas: combinações começadas por um bloco de 0's; combinações começadas por um bloco de 1's. Como o número de mudanças é par, teremos um número ímpar de blocos, k+1. Por exemplo, se começarmos a sequência com um bloco de 0's teremos $\frac{k}{2}+1$ blocos de 0's e $\frac{k}{2}$ blocos de 1's. Estes números invertem-se caso a sequência seja começada por um bloco de 1's.

Para cada uma destas duas situações o raciocínio é análogo ao que foi feito para k ímpar, tendo em atenção o número de blocos de 0's e de 1's.