por **António Pereira Rosa**
[Escola Maria Amália Vaz de Carvalho]

Transformações de Gráficos, Substituições e Equações do Terceiro Grau

O estudo das transformações dos gráficos de funções no 10.º ano de escolaridade é aproveitado neste trabalho para classificar as funções cúbicas por meio da sua redução a formas canónicas, bem como para a obtenção de resultados não triviais sobre os seus zeros. Tal redução é um passo essencial do método usado pelos algebristas italianos do século XVI para a resolução de equações do terceiro grau.

1. Introdução

A escrita deste trabalho foi inicialmente motivada pelo desejo de abordar o estudo das funções cúbicas no programa de Matemática B do 10.º ano sem cair na solução fácil de traçar apenas uns tantos gráficos com a calculadora. Em nossa opinião, o problema do estudo de funções polinomiais de grau superior a dois sem recorrer (quase…) exclusivamente à tecnologia gráfica é muito mais difícil de resolver no 10.º ano da Matemática B do que na Matemática A; nesta última, ao menos, ainda se estudam a divisão inteira e a factorização de polinómios. Quando tentávamos arranjar solução para este problema, apercebemo-nos de que era possível fazer um estudo das soluções de equações polinomiais utilizando não apenas instrumentos de tipo algébrico, mas também argumentos relacionados com as transformações dos gráficos de funções que os alunos viram anteriormente (a partir do gráfico ou da expressão analítica de uma função f, os alunos devem ser capazes de esboçar os gráficos das funções definidas por $y=f(x)+a$, $y=f(x+a)$, $y=f(ax)$ e $y=af(x)$ com a positivo ou negativo); à medida que estudávamos o assunto, percebemos que este se prestava a interessantes desenvolvimentos matemáticos, muito para além do que se aprende no Ensino Secundário, bem como a diversas referências de carácter histórico.

Não se julgue que nos opomos cegamente ao uso da tecnologia; muitos dos argumentos que apresentamos neste trabalho são de natureza gráfica, pelo que a calculadora (ou, melhor, um computador com um bom programa de traçado de gráficos, como o Winplot ou o Nucalc[1]) será um recurso precioso; por outro lado, um programa de cálculo simbólico (Maxima, Derive ou Mathematica, por exemplo) revela-se muito útil em certas partes do estudo.

Procurámos manter a exposição ao nível elementar; só vamos considerar polinómios com coeficientes em R e as suas raízes são, salvo aviso em contrário, apenas as reais.

2. Equações do segundo e do terceiro grau

Seja $ax^2+bx+c=0$ uma equação do segundo grau. Dividindo, se necessário, ambos os membros por a, podemos desde já supor que ela é da forma $x^2+px+q=0$. Fazendo a substituição $y=x+p/2$, obtemos uma equação do tipo binomial

[1] Disponíveis em http://math.exeter.edu/rparris/default.html e http://www.nucalc.com/Home.html, respectivamente; os gráficos apresentados neste trabalho foram feitos com o primeiro programa.

$$y^2+\left(-\frac{p^2}{4}+q\right)=0,$$

que é de resolução imediata. A título de exemplo, consideremos a equação $x^2+5x+6=0$; fazendo $y=x+5/2$, obtemos $y^2-1/4=0$, que tem as soluções $y=1/2 \vee y=-1/2$. Desfazendo a mudança de variável, vemos que a equação original tem as soluções $x=-2 \vee x=-3$. Para uma interpretação geométrica, tracemos os gráficos de $f(x)=x^2+5x+6$ e $g(x)=f(x-2.5)$ (ver figura 1; como se sabe, o gráfico de g obtém-se a partir do de f por meio de uma translação na horizontal de duas unidades e meia para a direita).

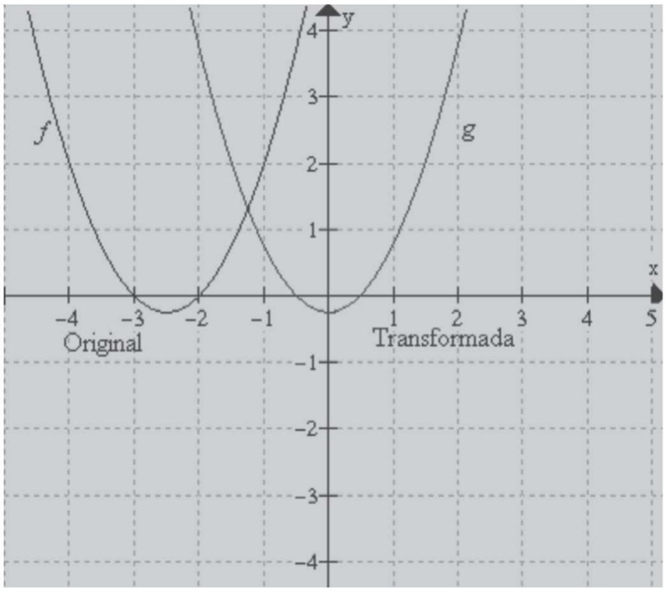

Figura 1

É de notar que se pode obter facilmente a conhecida fórmula resolvente da equação do segundo grau por uma substituição análoga à anterior; basta fazer $y=x+b/2a$ na equação $ax^2+bx+c=0$.

Vejamos agora o que se passa com as equações do terceiro grau. Qualquer equação mónica do terceiro grau, $x^3+px^2+qx+r=0$, pode ser transformada numa equação do terceiro grau sem termo quadrático por meio da substituição $y=x+p/3$, que alguns autores atribuem a Tartaglia; analogamente, a equação geral do terceiro grau, $ax^3+bx^2+cx+d=0$, pode ser transformada noutra equação do terceiro grau sem termo quadrático por meio da substituição $y=x+b/3a$. Estes resultados podem perfeitamente ser provados no 10.º ano de escolaridade (veja-se, por exemplo, a abordagem do desenvolvimento de $(a+b)^3$ feita em [1]). Naturalmente, se soubermos resolver a equação transformada, podemos obter imediatamente as soluções da equação original por simples inversão da transformação utilizada. Deixamos ao cuidado do leitor a formulação e prova dos resultados análogos para uma equação de grau n; trata-se de um bom exercício para alunos do 12.º ano, que podem ver assim uma aplicação menos usual da fórmula do binómio. Há no entanto uma diferença fundamental entre a equação do segundo grau e as de grau superior a dois: no caso do segundo grau, a equação transformada é de resolução trivial, o que não sucede para graus maiores. Mesmo no caso simples da equação do terceiro grau, $ax^3+bx^2+cx+d=0$, a substituição $y=x+b/3a$ é apenas o primeiro passo da resolução pelos métodos dos algebristas italianos do século XVI, como del Ferro, Tartaglia e Cardano. Para simplificar, consideremos uma equação mónica do terceiro grau, $x^3+px^2+qx+r=0$, e façamos a substituição $y=x+p/3$; após simplificações, obtemos a nova equação

$$y^3+\frac{3q-p^2}{3}y+\frac{2p^3-9pq+27r}{27}=0.$$

Esta equação só é de resolução imediata se o coeficiente de y se anular (isto é, se $3q-p^2=0$) ou se o termo independente for nulo (isto é, se $2p^3-9pq+27r=0$); no caso extremo de se verificarem ao mesmo tempo as condições $3q-p^2=0$ e $2p^3-9pq+27r=0$, a equação transformada é $y^3=0$, pelo que, desfazendo a mudança de variável, podemos concluir que a equação original tem a raiz tripla $-\dfrac{p}{3}$.

3. Uma classificação das funções cúbicas

As considerações anteriores sugerem uma possível classificação das funções cúbicas a partir dos seus gráficos. Consideremos definido no plano um referencial o.n. $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ e seja $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ uma função cúbica.

Podemos desde já supor que[2] $a>0$; utilizando a substituição anteriormente apresentada[3] $y=x+b/3a$ e pondo a em evidência[4], verificamos que basta estudar o caso em que f é da forma $f(x)=x^3+px+q$. Recorrendo ao estudo do sinal da derivada, vemos que f é estritamente crescente se $p\geq 0$ (figura 2) e que admite um máximo e um mínimo com abcissas $-\sqrt{-p/3}$ e $\sqrt{-p/3}$ respectivamente, quando $p<0$ (figura 3).

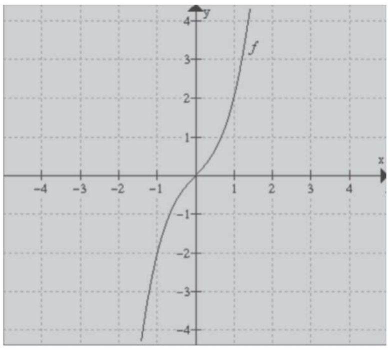

Figura 2

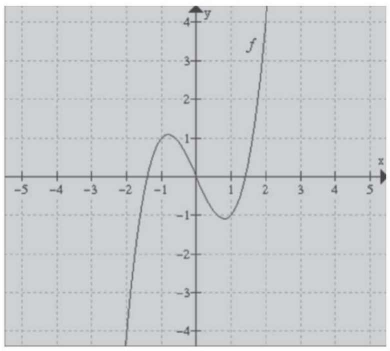

Figura 3

Por outro lado, se $q=0$, a função é ímpar, pelo que admite a origem como centro de simetria. Se $q\neq 0$, o gráfico obtém-se do anterior por uma translação na direcção vertical, com vector $q\vec{e}_2$; o centro de simetria é neste caso o ponto $(0,q)$ que, como é fácil de verificar recorrendo ao sinal da segunda derivada, é um ponto de inflexão. Temos assim que o gráfico de qualquer função cúbica pode ser obtido por meio de translações e contracções/dilatações a partir de um dos "protótipos" (*primeira, segunda, terceira e quarta formas canónicas*) apresentados nas figuras 2, 3, 4 e 5, respectivamente.

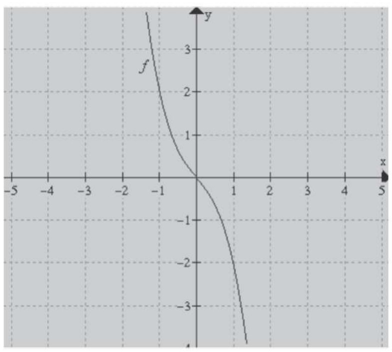

Figura 4

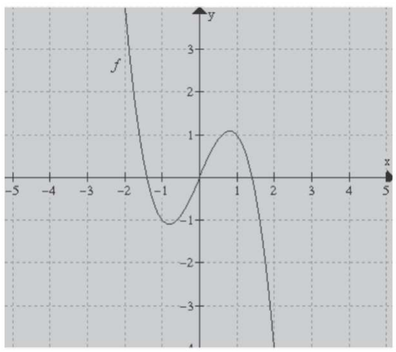

Figura 5

[2]Se $a<0$, consideraríamos a função simétrica de f, $f_1=-f$; como se sabe, o gráfico de f obtém-se a partir do gráfico de f_1 por meio de uma simetria de eixo Ox.

[3]Repare-se que esta transformação corresponde a uma translação na direcção horizontal, de vector $\dfrac{b}{3a}\vec{e}_1$.

[4]A multiplicação por a corresponde a uma *contracção/dilatação* na vertical de centro O (uma aplicação de R^2 em R^2 que ao par (x,y) faz corresponder o par (x,ay)); trata-se de uma *contracção* se $0<a<1$ e de uma *dilatação* se $a>1$.

Vejamos um exemplo concreto: seja $f_1(x)=2x^3-4x^2-x+3$.

Vamos remover o termo em x^2 por meio da substituição $y=x-2/3$, obtendo[5] assim a função transformada

$$f_2(x)=2x^3-11x/3+31/27=2(x^3-11x/6+31/54)$$

Em seguida, devemos considerar as funções $f_3(x)=x^3-11x/6+31/54$ e $f_4(x)=x^3-11x/6$, concluindo-se com esta última o processo de redução à forma canónica; o gráfico de f_1 é pois um exemplo do segundo tipo por nós considerado, correspondendo à forma canónica exemplificada na figura 3. A sequência de gráficos que a seguir se apresenta ilustra as quatro funções f_1, f_2, f_3 e f_4 consideradas ao longo do processo de redução à forma canónica.

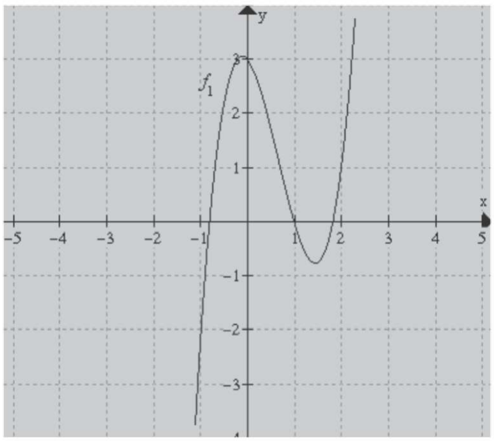

Figura 6

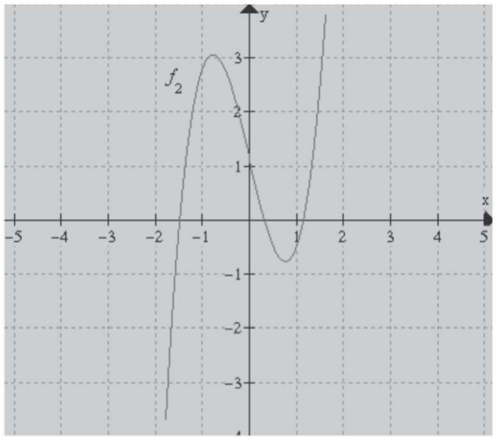

Figura 7

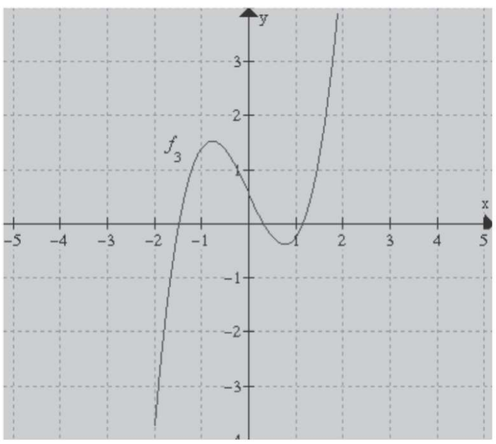

Figura 8

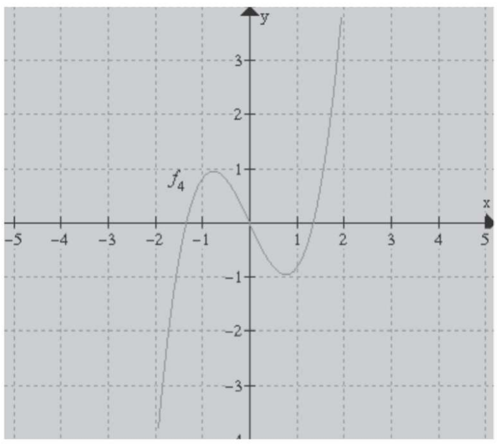

Figura 9

Se estivermos apenas interessados em ver qual a forma canónica correspondente a uma função cúbica $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ sem obter toda a sequência de transformadas podemos proceder de modo mais expedito. Com efeito, a classificação que fizemos baseia-se essencialmente na monotonia e extremos da função considerada, pelo que pode ser feita recorrendo ao estudo do sinal de $f'(x)=3ax^3+2bx^2+c$. Tem-se assim:

[5]Usamos x como variável independente, como é usual.

1. Se f' não tiver zeros ou se tiver um zero duplo, f é estritamente monótona[6], pelo que se trata da primeira forma canónica se $a>0$ (ver figura 3) e da terceira se $a<0$ (ver figura 5).

2. Se f' tiver dois zeros distintos, os extremos de f ocorrerão na ordem *máximo-mínimo* se $a>0$ (então teremos a segunda forma canónica; ver figura 4) e na ordem *mínimo-máximo* se $a<0$; tratar-se-à então da quarta forma canónica; ver figura 6.

Terminaremos esta secção com algumas considerações sobre os zeros. Seja f uma função cúbica. Verifica-se sempre uma das seguintes alternativas:

1. f tem três zeros reais distintos.

2. f tem um zero real simples e dois zeros complexos (conjugados).

3. f tem dois zeros reais distintos, um simples e um duplo.

4. f tem um zero real triplo.

Para justificar esta afirmação basta reparar que ela decorre imediatamente de algumas propriedades bem conhecidas:

1. Um polinómio de coeficientes reais e grau ímpar tem sempre pelo menos um zero real.

2. Se um número complexo z_0 é raiz de um polinómio de coeficientes reais, o seu conjugado $\bar{z}_0$ também o é.

3. Um polinómio do terceiro grau não pode ter mais de três zeros.

Voltando à questão dos zeros, podemos supor que a função é da forma $f(x)=x^3+px+q$. Comecemos por provar o seguinte resultado:

Teorema 1 *Seja $f(x)=x^3+px+q$ uma função cúbica. Então, f tem três zeros reais distintos se e só se f tem um máximo e um mínimo com sinais contrários.*

Demonstração: Se f tem três zeros reais distintos, $x_1<x_2<x_3$, segue-se do Teorema de Rolle que a sua derivada, f', que é uma função quadrática, tem dois zeros, $y_1<y_2$, verificando-se a seguinte ordenação

$$x_1<y_1<x_2<y_2<x_3.$$

Pelas propriedades da função quadrática, os pontos críticos em causa são efectivamente extremantes. Se o primeiro extremo $f(y_1)$ for um máximo positivo, f anular-se-á em x_2 e terá em seguida um mínimo negativo em y_2; os outros casos são análogos.

Reciprocamente, se f tiver dois extremos com sinais contrários, o resultado decorre imediatamente da continuidade de f e do facto de $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e de $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ terem sinais opostos.

Continuando a supor que $f(x)=x^3+px+q$ tem três zeros distintos, seja $f'(x)=3x^2+p$ a sua derivada; para f ter dois extremos, f' tem de ter dois zeros reais distintos e portanto p tem de ser um número negativo. Neste caso, os dois

[6] Sabe-se que se f' for estritamente positiva ou negativa, f é estritamente monótona. Se se verificar somente que $f'\geq 0$ ou $f'\leq 0$, apenas se pode concluir, em geral, monotonia em sentido lato. No caso particular em estudo, podemos, no entanto, ir mais além. Com efeito, suponhamos que $f'\geq 0$ e que existiam x_0, x_1 com $x_0<x_1$ tais que $f(x_0)=f(x_1)$; dado $x\in[x_0, x_1]$, vem $f(x_0)\leq f(x)\leq f(x_1)=f(x_0)$, donde se conclui que f é constante no intervalo $[x_0, x_1]$ e, portanto, a sua derivada, a função quadrática f', tem de ser identicamente nula no mesmo intervalo, o que é absurdo. O caso $f'\leq 0$ resolve-se de forma análoga.

zeros são $\alpha=\sqrt{-p/3}$ e $-\alpha=-\sqrt{-p/3}$ e a condição do Teorema 1 escreve-se $f(\alpha)\times f(-\alpha)$. Vem então

$$f(\alpha)\times f(-\alpha)<0 \Leftrightarrow (\alpha^3+p\alpha+q).(-\alpha^3-p\alpha+q)<0.$$

Ora como $p=-3\alpha^2$, segue-se que

$$f(\alpha)\times f(-\alpha)<0 \Leftrightarrow (-2\alpha^3+q).(2\alpha^3+q)<0.$$

Finalmente, e tendo de novo em conta que $p=-3\alpha^2$, obtém-se

$$f(\alpha)\times f(-\alpha)<0 \Leftrightarrow 4p^3+27q^2<0.$$

Reciprocamente, se $4p^3+27q^2<0$, então $p<0$ e f' tem dois zeros distintos, logo f tem dois extremos e conclui-se, pelo Teorema 1, que f tem três zeros reais distintos.

Analisemos agora o caso $4p^3+27q^2=0$; esta igualdade, apenas possível se $p\leq 0$, é equivalente a $f(\alpha)\times f(-\alpha)=0$ e portanto tem de ser $f(\alpha)=0$ ou $f(-\alpha)=0$. Como $f'(\alpha)=f'(-\alpha)=0$, um dos valores α ou $-\alpha$ tem de ser um zero duplo[7] (pelo menos) de f. Se $p=0$, segue-se que $q=0$ e a função reduz-se a $f(x)=x^3$, que tem o zero triplo. Reciprocamente, é fácil de ver que, se existir um zero triplo, ele tem de ser[8] 0 e $p=q=0$.

Consideremos agora o caso $p<0$; já sabemos que vai haver um zero duplo β e um zero simples γ. Por definição de zero duplo, verifica-se que $\beta^3+p\beta+q=0$ e $3\beta^2+p=0$; multiplicando a primeira igualdade por 3, a segunda por β e subtraindo ordenadamente, vem $2p\beta+3q=0$ e portanto

$$\beta=-\frac{3q}{2p}.$$

Para o cálculo do zero simples γ, escreva-se $x^3+px+q=(x-\gamma).(x-\beta)^2$, efectuem-se os cálculos no segundo membro e igualem-se os coeficientes das potências em x^2 em ambos os membros. Vem $\gamma=-2\beta$, donde, tendo em conta a expressão anteriormente obtida para β, se conclui que

$$\gamma=\frac{3q}{p}.$$

Finalmente, é óbvio que o caso $4p^3+27q^2>0$ tem de corresponder à existência de um zero real simples e dois zeros complexos conjugados.

As considerações anteriores podem resumir-se no seguinte teorema:

Teorema 2 *Seja $f(x)=x^3+px+q$ uma função cúbica. Então verifica-se que:*

- *Se $4p^3+27q^2<0$, a função f tem três zeros reais distintos.*
- *Se $4p^3+27q^2=0$ e $p=0$, a função f tem o zero triplo 0.*
- *Se $4p^3+27q^2=0$ e $p\neq 0$, a função f tem o zero duplo $-3p/2q$ e o zero simples $3p/q$.*
- *Se $4p^3+27q^2>0$, a função f tem um zero real simples e dois zeros complexos conjugados.*

4. Algumas considerações sobre a apresentação aos alunos

O material apresentado nas secções anteriores é elementar, podendo ser apresentado aos alunos de Matemática A do Ensino Secundário, excepto a demonstração do Teorema 1, que recorre ao Teorema de Rolle. Quanto à Matemática B, a situação é mais delicada, devido não só ao facto de ter um programa mais curto e

[7] É fácil provar que um número α é zero de multiplicidade k de um polinómio p se e só se $p(\alpha)=p'(\alpha)=...=p^{(k-1)}(\alpha)=0$ e $p^{(k)}(\alpha)\neq 0$.

[8] Seja β esse zero triplo; tem então de ser $p(\beta)=p'(\beta)=p''(\beta)=0$ ou, efectuando os cálculos, $\beta^3+p\beta+q=3\beta^2+p=6\beta=0$, donde $\beta=p=q=0$.

menos ambicioso, mas também ao facto de muitos alunos desta disciplina estarem, em princípio, menos motivados para um estudo mais teórico e menos ligado às aplicações. Tendo isto em conta, apresentamos as seguintes sugestões:

1. O uso da substituição $y=x+b/2a$ para o estudo da equação do segundo grau deve ser feito no 10.° ano, tanto em Matemática A como em Matemática B, quando se abordam as transformações de gráficos de funções. Trata-se de um tema interessante, visualmente rico, mas que muitos alunos consideram difícil, confuso e com poucas aplicações práticas; demasiadas vezes acaba por se reduzir à resolução de questões de escolha múltipla com alguns gráficos. Presta-se também particularmente bem ao estudo com calculadora gráfica/computador. Para terminar, refira-se que o estudo desta substituição será para muitos alunos a última oportunidade de verem uma dedução da fórmula resolvente da equação do segundo grau.

2. Curiosamente, o programa de Matemática B do 10.° ano dá maior atenção ao estudo das funções cúbicas do que o de Matemática A; assim, sugerimos que em Matemática B se aborde o problema da redução das funções cúbicas gerais às funções cúbicas sem termo quadrático e que se refira (sem demonstração) a existência das quatro formas canónicas, um estudo que poderá ser facilitado pela calculadora gráfica/computador. Alguns dos assuntos mencionados no fim da secção 2 podem ser abordados quando do estudo de zeros de polinómios no 10.º ano de Matemática A e no 11.° ano em Matemática B.

3. A parte final da secção 3 exige mais conhecimentos, nomeadamente derivadas e números complexos. Assim, recomendamos que seja apresentada apenas no 12.° ano, na disciplina de Matemática A, embora os conhecimentos de derivadas necessários façam parte já do programa do 11.° ano desta disciplina. A maioria do material exposto (omitindo eventualmente algumas justificações, como a do Teorema 1) pode ser estudada no tema 2 do 12.° ano; exceptuam-se naturalmente as referências aos números complexos, que fazem parte do tema 3. Pensamos que nunca é demais sublinhar que os números complexos surgiram não devido a problemas com equações quadráticas, mas sim devido à resolução da equação cúbica pela fórmula de Tartaglia. Quanto à Matemática B, a situação é diferente; não só os números complexos não fazem parte do programa, mas também o estudo das derivadas é feito apenas no final do último ano da disciplina, e numa perspectiva diferente. Pensamos no entanto que se pode aproveitar algum do material exposto, quiçá estudando apenas alguns exemplos bem escolhidos de equações e funções cúbicas (um de cada forma canónica, por exemplo) e referindo que os resultados se podem generalizar, omitindo-se as demonstrações. M

Referências

[1] **Costa, B. e Rodrigues, E.** (2004) – *Espaço B* (2ª edição), Edições ASA, Porto.

Bibliografia

Boyer, C. B. e Merzbach, U. C. (1989) – *A History of Mathematics* (2nd edition), John Wiley & Sons, New York.

Estrada, M. F., Sá, C. C., Queiró, J. F., Silva, M. C. e Costa, M. C. (2000) – *História da Matemática*, Universidade Aberta, Lisboa.

Hollingdale, S. (1991) – *Makers of Mathematics*, Penguin Books, London.

Lebossé, C., Hémery, C. e Faure, P. (1967) – *Algèbre et Statistique* (*classe de Première B*), Fernand Nathan Éditeur, Paris.

Oliveira, J. S. (1978) – "As equações algébricas do 3.º, 4.º e 5.º grau", *Boletim da SPM n.º1*, págs. 20-31.

Struik, D. J. (1992) – *História Concisa das Matemáticas* (2.ª edição), Gradiva, Lisboa.

CENTRO DE FORMAÇÃO
SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

CCPFC/ENT-AP-0266/08

ACÇÕES DE FORMAÇÃO DE MATEMÁTICA

ANO LECTIVO 2009 / 2010

Aplicações do Cabri3D
Aplicações do Geogebra
Aplicações do Geometer's SketchPad
Aplicações Informáticas em Probabilidades e Estatística
Cinderella
Correlação e Regressão em MACS
Elementos de Euclides
Ensinar Matemática em Quadros Interactivos
Ensinar Matemática em Quadros Interactivos - Aplicações
Ensinar Matemática em Quadros Interactivos - Complementos
Geometer's SketchPad e Excel na Modelação Matemática
Jogos Matemáticos
LaTeX
MACS
Matemática Elementar
Matemática Elementar: Aritmética e Geometria
Matemática no Excel
Mathematica
Probabilidades e Estatística

INFORMAÇÕES

Centro de Formação SPM
Av. da República, 45-3.º Esq.
1050-187 Lisboa
Tel.: 217986354
Tlm.: 96 000 90 45
E-mail: formacao@spm.pt

SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA