São os Matemáticos Puros particularmente pouco aptos para o Cálculo das Probabilidades?

António Brotas
Departamento de Física, Instituto Superior Técnico, Lisboa

1.Introdução

Peço para o título deste artigo não ser considerado uma falta de respeito. Várias vezes na vida fui professor de Matemática, quase sempre em Escolas de Engenharia ou equivalentes, e ensinei Cálculo das Probabilidades (por exemplo, na cadeira de Métodos Estatísticos do 2º ano, no Instituto Superior Técnico, em 1972-73), mas sempre me considerei um não matemático, no sentido de não ser um investigador em Matemática. A tribo dos Matemáticos puros é uma tribo a que não pertenço. Os seus elementos têm um modo de pensar (sobretudo de descobrir novos terrenos no seu universo abstracto e de fazer demonstrações) que me escapa, respeito e admiro muito (e invejo um bocado).

Este título pode ser olhado como uma provocação - para provocar réplicas e comentários - mas não é uma provocação gratuita e sem fundamento. As informações surpreendentes que me levam a fazer a pergunta encontram-se no capítulo 6 intitulado *"Ficar com a cabra"* do muito interessante livro: *"O homem que só gostava de números"*, de Paul Hoffman, premiado com o Rhône-Poulenc Prize 1999 para o melhor livro de ciência (suponho que de divulgação científica), recentemente editado em português pela Gradiva.

Digo, desde já, de que se trata.

O livro é, no essencial, uma biografia de Paul Erdös, que viveu de 1916 a 1996, e terá sido o matemático que mais textos publicou depois de Gauss e Euler. No entanto, este matemático, um dos maiores e mais influentes do século, perante um mero problema de Cálculo das Probabilidades sugerido no decorrer de um concurso televisivo, errou, teve a maior dificuldade em reconhecer o erro (só se convenceu diante de uma simulação em computador), e continuou a considerar que faltava ainda uma verdadeira demonstração do resultado.

O espantoso é que muitos matemáticos, alguns proeminentes, o acompanharam nestas dificuldades à volta de um problema que considero acessível aos meus antigos alunos de Métodos Estatísticos (talvez algum leia este texto).

2.O problema

O problema, divulgado por uma matemática não muito considerada, mas muito vaidosa (apregoa ter o QI mais alto dos Estados Unidos) e autora de livros com grande aceitação do público, a Srª Marylin vos Savant, é o seguinte:

> Num concurso televisivo, atrás de três portas fechadas, estão um automóvel e duas cabras.
> Os concorrentes são convidados a escolher e indicar uma porta e, depois, a abri-la, ficando com o que está atrás: o automóvel ou a cabra.
> Mas aos concorrentes é dada uma faculdade adicional. O apresentador, que sabe onde está o carro, depois de eles indicarem a porta que escolheram, abre uma das outras duas portas atrás da qual está uma cabra. Os concorrentes, depois de verem esta cabra, podem, caso

o desejem, alterar a opção inicial e, em vez dela, escolher a outra porta que ainda está fechada.

O problema de Cálculo das Probabilidades é o de *saber se os concorrentes têm alguma vantagem em fazer uso desta faculdade adicional*.

A Srª Marylin, muito intuitiva, disse que sim, e afirmou, desde logo, que os concorrentes duplicam as suas possibilidades de ganhar o carro no caso de alterarem a opção inicial. Erdös, e vários outros matemáticos, disseram que não, que os concorrentes não têm qualquer vantagem em mudar.

A Srª Marylin apresentou, então, os quadros seguintes com a indicação das hipóteses de ganho dos concorrentes no caso de manterem a opção inicial e no caso de a alterarem:

Possibilidades de ganho dos concorrentes que escolheram a porta 1 e mantiveram a opção inicial depois de verem a cabra numa das outras duas portas:

	Porta 1	Porta 2	Porta 3	Ganho ou perda
Hip. A:	carro	cabra	cabra	ganham
Hip. B:	cabra	carro	cabra	perdem
Hip. C:	cabra	cabra	carro	perdem

Possibilidades de ganho dos concorrentes que escolheram a porta 1 e alteraram a opção inicial depois de verem a cabra numa das outras duas portas:

	Porta 1	Porta 2	Porta 3	Ganho ou perda
Hip. A:	carro	cabra	cabra	perdem
Hip. B:	cabra	carro	cabra	ganham
Hip. C:	cabra	cabra	carro	ganham

Com estes quadros, a Srª Marylin convenceu muitas pessoas de que tinha razão, entre elas o matemático Vázsonyi, amigo e colaborador de Erdös, mas não o próprio Erdös, que teve de se render face aos resultados de uma simulação feita em computador com o método de Monte Carlo (uma humilhação para um matemático teórico), mas continuou a afirmar faltar uma verdadeira demonstração matemática.

3. Porquê tanta dúvida?

Como explicar estas dificuldades de matemáticos tão eminentes?

Tentemos ver os passos em que se poderão ter enganado.

Designemos por A, B, e C, respectivamente, os acontecimentos: *"o carro está atrás das portas 1, 2 e 3"*.

Uma vez que as portas são iguais aceitamos ser:

$$p(A) = p(B) = p(C) = \frac{1}{3}\ .$$

Quando o concorrente escolhe inicialmente a porta 1, a probabilidade de ganhar o carro é :

$$p(1 - \text{ganhar}) = p(A) = \frac{1}{3}\ .$$

Designemos por K_{23} o acontecimento: *"depois de o concorrente ter escolhido a porta 1, o apresentador abriu uma das portas, 2 ou 3, e mostrou uma cabra"*.

Este acontecimento K_{23} é um acontecimento certo, dado que o apresentador tem o propósito e a possibilidade de o realizar, depois do concorrente ter escolhido a porta 1. Temos assim

$$p(K_{23}) = 1\ ,$$

e também

$$p(K_{23} | A) = 1\ ,$$

pois, no caso de o carro estar em 1, o apresentador pode, perfeitamente, mostrar uma cabra em 2 ou em 3.

Temos ainda $p(K_{23} | B) = 1$ pois, no caso de o carro estar em 2, o apresentador pode mostrar a cabra que está em 3. Idem para, $p(K_{23} | C) = 1$.

As fórmulas correntes:

$$p(A \text{ e } K_{23}) = p(A).p(K_{23}|A) = p(K_{23}).p(A|K_{23})$$

e

$$p(B \text{ e } K_{23}) = p(B).p(K_{23}|B) = p(K_{23}).p(B|K_{23}),$$

permitem-nos calcular:

$$p(A|K_{23}) = p(A) = \frac{1}{3}\ ,\ \ p(B|K_{23}) = p(B) = \frac{1}{3}\ .$$

Idem, para

$$p(C|K_{23}) = p(C) = \frac{1}{3}\ .$$

Vemos que a verificação de K_{23} em nada altera as probabilidades iniciais de A, B, C. Este resultado era previsível, dado K_{23} ser um acontecimento certo, e a verificação (constatação) de um acontecimento certo não alterar as probabilidades atribuíveis aos diferentes acontecimentos ou, em linguagem da *Teoria da Informação*, não nos trazer qualquer informação adicional.

Penso que terá sido este resultado, previsível desde o início, que terá induzido em erro muitos dos intervenientes. Como o *"ver uma cabra numa das portas 2 ou 3"* em nada altera as probabilidades iniciais, consideraram que a situação *"depois"* era igual à situação *"antes"*, não havendo, em consequência, qualquer razão para alterar uma opção inicial.

Sucede porém que, quando o apresentador mostra uma cabra numa das portas 2 ou 3, mostra-a, efectivamente, *numa das portas* que é vista pelo concorrente.

O acontecimento K_{23} deve assim ser olhado como a reunião de dois acontecimentos aleatórios incompatíveis:

K_2 (*o apresentador mostra uma cabra atrás da porta 2*)

e

K_3 (*idem atrás da porta 3*).

Sendo $p(K_{23}) = p(K_2 \text{ ou } K_3) = p(K_2) + p(K_3)$, sendo as portas iguais e não devendo ter o apresentador qualquer preferência, devemos ter:

$$p(K_2) = p(K_3) = \frac{1}{2}\ .$$

Temos ainda, como é fácil de notar dado o seu significado:

$$p(K_2|A) = \frac{1}{2}\ ,\ p(K_2|B) = 0\ ,\ \ p(K_2|C) = 0\ .$$

Estes resultados e as fórmulas correntes:

$$p(A \text{ e } K_2) = p(A)\ .\ p(K_2|A) = p(K_2)\ .\ p(A|K_2)\ ,$$

$$p(B \text{ e } K_2) = p(B)\ .\ p(K_2|B) = p(K_2)\ .\ p(B|K_2)\ ,$$

$$p(C \text{ e } K_2) = p(C)\ .\ p(K_2|C) = p(K_2)\ .\ p(C|K_2)$$

permitem-nos calcular:

$$p(A|K_2) = p(A) = \frac{1}{3},\ p(B|K_2) = 0\ ,\ p(C|K_2) = 2p(C) = \frac{2}{3}.$$

Vemos assim que, no caso de se verificar o acontecimento K_2 (o apresentador mostrar uma cabra atrás da porta 2) a probabilidade de A (de o carro estar em 1) se mantém, a probabilidade de B (de o carro estar em 2) desce para zero e a probabilidade de C (de o carro estar em 3) duplica.

O concorrente duplica assim a probabilidade de ganhar o carro, se mudar a sua escolha da porta 1 para a porta 3.

Vale a pena transcrever uma carta de um opositor da Srª Marylin, que quase a insulta, o Sr. Scott Smith, doutorado da Universidade da Florida:

> *"Meteu água e fê-lo em grande! Passo a explicar: depois de o apresentador mostrar a cabra, passa (o concorrente) a ter uma hipótese em duas de acertar. Quer mude a escolha, quer não, as hipóteses são iguais. Existe iliteracia matemática em quantidade suficiente neste país (Estados Unidos) e não precisamos do maior QI do mundo para a propagar mais. Que vergonha!"*

O Sr. Scott Smith notou (e era difícil não notar) que quando, por exemplo, o apresentador mostra uma cabra na porta 2 (isto é, se verifica K_2), a probabilidade de o carro estar em 2 passa a zero. Mas, restando duas hipóteses para a localização do carro, esteve desatento e admitiu de um modo primário que continuavam igualmente prováveis, não sabendo fazer as contas para constatar que, com a verificação de K_2, a probabilidade de uma continuava na mesma e a de outra duplicava.

4. Epílogo

Chegámos aos resultados expostos usando fórmulas correntes e conhecimentos triviais de Cálculo das Probabilidades. Tivemos, simplesmente, um grande cuidado na caracterização dos acontecimentos considerados e das situações (contextos) em que são calculadas as respectivas probabilidades.

Talvez Erdös aceitasse o texto que acabei de expor como uma explicação razoável e, em face dela, dispensasse o ensaio com o computador.

Como explicar as dificuldades de matemáticos ilustres face a um problema tão simples?

A Teoria das Probabilidades (vulgo Cálculo das Probabilidades) é uma disciplina algo à margem das matemáticas, que lida com uns acontecimentos muito delicados, os acontecimentos aleatórios os quais, *nas mesmas circunstâncias*, umas vezes se verificam outras não. A essência da Teoria consiste em atribuir um número, designado por probabilidade, a cada acontecimento aleatório *considerado em determinadas circunstâncias*.

Nos problemas reais como, por exemplo:

Qual é a probabilidade de chover em Lisboa no dia 1 de Janeiro do ano 2010 (ou de ter chovido no mesmo dia do ano 1000),

é-nos impossível calcular a probabilidade do acontecimento indicado. O que podemos é tentar estimá-la o melhor possível usando as informações de que dispomos. A noção de probabilidade ou, talvez mais exactamente, as estimativas que dela podemos fazer, têm assim um carácter altamente subjectivo, pois dependem das informações de que cada um dispõe, e mesmo das suas convicções.

Nestes problemas em que há estimativas a fazer, os matemáticos estão mais ou menos em pé de igualdade com os outros cientistas e técnicos estando, certamente, nos problemas que envolvem o clima, em situação de inferioridade face aos metereologistas que "sentem" muito melhor a chuva.

Nos problemas mais simples, em que nos defrontamos com situações esquematizadas, como é o caso do problema considerado no início deste texto, podemos calcular a probabilidade dos diferentes acontecimentos, desde que sejam muito bem indicadas as *condições em que eles são considerados*, que incluem a informação na posse dos vários intervenientes nos diferentes momentos do processo. A descrição dos acontecimentos e destas condições, que nalguns casos exige muita atenção, é uma questão "exterior" à Matemática.

É possível que os matemáticos, habituados a viver no interior do seu universo abstracto estejam algo destreinados de olhar para fora, e nalguns casos, não o façam com a necessária atenção. É esta a única explicação que encontro para as dificuldades relatadas no livro de Paul Hoffman. É uma suposição que poderá, perfeitamente, ser rebatida.

Os físicos, habituados a olhar para problemas do mundo físico, sentem-se, por vezes, mais à vontade para abordar este tipo de problemas. Penso, assim, ser pena que nas nossas Universidades e nas de quase todo o mundo os físicos tenham sido afastados do ensino elementar (e básico) de Cálculo das Probabilidades e Estatística.

Permito-me terminar com um problema que considero adequado para os estudantes de Estatística e Cálculo das Probabilidades e que é uma generalização do problema anterior.

De um baralho são tiradas 3 cartas que são colocadas nas posições 1, 2 e 3 viradas para baixo. O concorrente deve indicar uma das cartas e ganha um prémio se ela for um rei. O apresentador conhece as três cartas. Ao concorrente, após escolher uma delas, é dada a faculdada adicional de dizer ao apresentador: "Vire uma das cartas, que ainda não foi virada, que não deve ser um rei, a menos que a isso seja obrigado". Em seguida, depois de ver o resultado, pode alterar a opção inicial, optando pela última carta ainda não virada.

Num concurso, o apresentador mostrou uma carta que não era um rei: terá o concorrente vantagem em mudar a opção inicial?