por Graciano de Oliveira
[Universidade de Lusófona de Lisboa]

Maneiras de Estudar Matemática

Como estudar Matemática? Deve dar-se prioridade à compreensão dos conceitos ou à resolução de muitos exercícios? O melhor método (caso exista um melhor método) variará de pessoa para pessoa? Dependerá do grau de ensino e da maturidade do estudioso?

Como se deve estudar Matemática? Mais concretamente, qual a importância relativa do estudo da teoria e da prática? Entendemos estes termos no sentido que os estudantes (sobretudo os do ensino superior) lhes dão: teoria é o estudo dos teoremas com a compreensão das demonstrações ao pormenor, prática é a resolução de exercícios.

Tradicionalmente, os estudantes põem a prática em primeiro lugar. Não só os de Engenharia, mas também os de Matemática. A justificação faz-se com afirmações do género: "a prática é que interessa" e "a teoria é coisa livresca".

Nalgumas matérias, este ponto de vista dá resultados razoáveis, pelo menos para efeitos de exames. Por exemplo, é possível, juntando um pouco de sorte, conseguir algum êxito na discussão de um sistema de equações algébricas lineares com fraco entendimento do que se está a fazer. É também possível calcular derivadas, primitivas e integrais sem perceber bem o que isso seja, mas de modo a alcançar uma pontuação aceitável num teste. Ou traçar uma curva. Para isso basta saber que se a derivada é positiva, a curva sobe, se a segunda derivada for positiva, a barriga da curva é para baixo, mesmo que não se tenha apreendido a definição de derivada nem a de convexidade (basta o conceito de barriga). Pode não se saber bem o que se faz, mas faz-se o suficiente para se obter mais de 50% da pontuação.

Há, porém, muitas matérias em que o fraco conhecimento dos quês e porquês conduz inevitavelmente ao desastre. São exemplo disso disciplinas como Topologia e Álgebra, em que aparecem numerosos exercícios que começam com "demonstre que…". São clássicas as queixas dos alunos, mesmo a respeito de problemas muito simples, de que não se vê por onde se lhes pegar, não é como com as derivadas.

Há quem pense que nesta maneira de estudar (dando toda a prioridade à prática…) reside uma boa parte da explicação das dificuldades com a Matemática. É que quem se preocupar primeiro com a compreensão fina da teoria, incluindo o estudo das demonstrações até ao mais ínfimo pormenor e sua memorização, notará em breve que sabe o que está a fazer. Que não dará respostas sem tom nem som na esperança de que peguem (para utilizar uma palavra muito comum) porque sabe reconhecer quando não pegam. E notará que muitos exercícios tidos como difíceis não passam, afinal, de meras concretizações de teoremas gerais. Quem tiver os teoremas gerais sabidos, assimilados, digeridos e principalmente bem presentes na memória, resolve de olhos fechados.

A *Gazeta* gostaria de saber a sua opinião quanto à dicotomia acima descrita.

1. Qual a sua opinião sobre o equilíbrio entre as duas vertentes (i) estudo da teoria, (ii) estudo da prática?

2. Que importância atribui ao estudo detalhado das demonstrações, tanto no ensino superior como no secundário?

3. Fala-se na beleza da matemática. Onde a encontramos, na teoria ou na resolução de exercícios?

Glória Cravo, Universidade da Madeira

Qual a sua opinião sobre o equilíbrio entre as duas vertentes (i) estudo da teoria, (ii) estudo da prática?

Para começar, convém mencionar que a matemática é, por natureza, uma ciência com uma forte componente teórica. Deste modo, a componente teórica assume um papel fundamental, que não pode simplesmente ser substituído pela resolução sistemática de exercícios. É na componente teórica que são adquiridos os conceitos, só sendo possível a sua manipulação quando devidamente introduzidos. É essencial a consolidação dos conteúdos teóricos para posteriormente passar-se à resoluçã de problemas/ exercícios, caso contrário, corre-se o grave risco de se criar maus hábitos de estudo, incutindo nos estudantes técnicas e regras básicas de resolução de exercícios. Este é um risco a ser evitado, pois é extremamente importante capacitar os estudantes para a compreensão dos conteúdos matemáticos inerentes à resolução dos problemas/exercícios propostos. Há que os incentivar a estimular o seu raciocínio, bem como o seu espírito crítico e criativo.

Penso ser vital o conhecimento do trajecto percorrido até à obtenção de uma resposta. Por conseguinte, é fundamental dar-se prioridade à compreensão dos conceitos. Para alcançar esse objectivo terá de existir uma boa articulação entre o estudo da teoria e o estudo da prática, de modo a permitir uma "simbiose" natural entre estas duas componentes. É com a obtenção desse equilíbrio que contribuiremos para uma melhor formação matemática.

Que importância atribui ao estudo detalhado das demonstrações, tanto no ensino superior como no secundário?

Na minha opinião, o estudo das demonstrações (em ambos os níveis de ensino) é extremamente importante. Por um lado, é fundamental que os alunos constatem que os resultados apresentados têm uma justificação natural, que não surgem sem qualquer suporte. Por outro lado, as demonstrações têm a capacidade de estimular a imaginação e, por conseguinte, proporcionam um maior poder de abstracção que é essencial na aprendizagem da matemática. Afinal, a matemática não é um repositório de receitas para resolver exercícios. A aprendizagem matemática passa por vários níveis: apresentação dos conceitos, interiorização e manipulação dos mesmos e, finalmente, a sua aplicação. Estas etapas são essenciais para uma boa aprendizagem. Sem dúvida, o estudo/análise das demonstrações (mesmo que sejam omitidos certos detalhes) tem a capacidade de fomentar este processo.

Em relação ao ensino secundário, só gostaria de referir que não há necessidade de se apresentar muitas demonstrações, mas apenas as mais importantes. Evidentemente, alguns detalhes podem ser omitidos. O mais importante é incentivar o espírito crítico e criativo dos estudantes, estimulando a sua imaginação, bem como incutindo-lhes hábitos de análise, discussão e iniciativa na resolução de problemas.E a análise das demonstrações contribui indiscutivelmente para alcançar estes objectivos.

Fala-se na beleza da matemática. Onde a encontramos, na teoria ou na resolução de exercícios?

A matemática é, por natureza, uma ciência extremamente rica e bela. A sua beleza encontra-se um pouco por todo o lado. Por exemplo, ao olharmos para um simples calendário (gregoriano) é curioso constatar que está subjacente a noção de congruência módulo 7. Em muitas outras situações da nossa vida deparamo-nos com diversos conceitos matemáticos. É, de facto, fascinante constatar a importância e a presença constante da matemática nas nossas vidas.

Mas, sem dúvida, o seu lado mais belo e criativo encontra-se associado à componente teórica. A teoria possibilita incentivar a imaginação e a criatividade. E que há de mais belo do que a criatividade? Ser criativo é ver para além daquilo que é apresentado… É dar mais um "passo", ir mais além, é procurar respostas e encontrar novos problemas… É caminhar em busca de novos desafios! E note-se que este processo tem vindo a repetir-se ao longo dos tempos, facultando a obtenção de respostas e gerando novos problemas. Assim, identifico a profunda beleza da matemática nesta busca contínua de respostas e esta busca insere-se no âmbito da teoria.

António Bivar, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (professor aposentado)

Qual a sua opinião sobre o equilíbrio entre as duas vertentes (i) estudo da teoria, (ii) estudo da prática?

Os exercícios não são mais (nem menos) do que pequenos teoremas suficientemente simples para que seja razoável esperar que os alunos a que se destinam sejam capazes de os demonstrar e, em certos casos, acabar de os enunciar. Quando um aluno resolve o exercício 12 + 5 = ? respondendo "17", está a enunciar um corolário do teorema que legitima o algoritmo da soma que utilizou. A demonstração desse corolário é precisamente a aplicação do teorema-algoritmo a esse caso particular, que tem de ser reconhecido como tal, fazendo, além disso, apelo a um dos importantes resultados que constituem a chamada tabuada. Por este exemplo se percebe que é muitas vezes indispensável conhecer conjuntos de teoremas antes que seja possível estudar pormenorizadamente as respectivas demonstrações; o objectivo, nesses casos, não é escamotear a actividade dedutiva mas, pelo contrário, centrar a atenção na obtenção rigorosa de resultados ao alcance do aluno na fase da aprendizagem em que se encontra. A natureza da própria matemática determina, em cada nível de ensino, quais os resultados que é necessário conhecer sem demonstração, aqueles cujas demonstrações podem ser compreendidas com utilidade em cada momento e, finalmente, os que podem ser deduzidos e demonstrados pelos próprios alunos e que constituem os chamados exercícios. Estes deverão ser suficientes para que o aluno, pelo menos, comece a encarar os resultados fundamentais do curso como essencialmente "familiares".

Que importância atribui ao estudo detalhado das demonstrações, tanto no ensino superior como no secundário?

Lembrarei apenas que tal estudo constitui o contacto directo com uma apresentação sintética e elegante de porções relevantes da matemática já feita; dispensá-lo impede esse contacto, salvo raras excepções.

Fala-se na beleza da matemática. Onde a encontramos, na teoria ou na resolução de exercícios?

O que aqui se chama "teoria" é como uma obra de arte cuja contemplação só despertará sentimentos estéticos quando formos capazes de a compreender; a resolução de exercícios apela à nossa própria criatividade, mas num âmbito mais modesto. Assim, podemos encontrar essa beleza em ambos os campos, não se conhecendo limites para a que podemos apreciar na "teoria", ou seja, na contemplação da matemática já feita, e havendo a oportunidade essencial para saborear um pouco da "beleza do ponto de vista do artista", ainda que em porções mais limitadas, na resolução de exercícios.

António Leal Duarte, Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra

Qual a sua opinião sobre o equilíbrio entre as duas vertentes (i) estudo da teoria, (ii) estudo da prática?

Creio que a nível inicial o estudo terá de ser apenas prático (os algoritmos das operações aritméticas aprendem-se apenas com a prática); mesmo na manipulação de expressões algébricas ou no cálculo de derivadas, a prática é fundamental! Em níveis avançados, a teoria será mais importante do que a prática, sem que esta última seja excluída. Recordo que na minha aprendizagem, aos 12-13 anos, foi-me ensinado um algoritmo para extracção das raízes quadradas; nunca o consegui fixar, pois não via nele nenhuma relação com a raiz quadrada! Parece-me também que para aplicar qualquer noção matemática numa situação nova dever-se-á ter compreendido bastante bem essa noção (nomeadamente com o estudo de demonstrações que a envolvam), isto é, a respectiva teoria e não apenas uma quantidade de algoritmos ou cálculos.

Que importância atribui ao estudo detalhado das demonstrações, tanto no ensino superior como no secundário?

As demonstrações desempenham um papel fundamental no estabelecimento de verdades matemáticas; não nos devemos esquecer, no entanto, também do papel da intuição/raciocínios heurísticos/exemplos, nomeadamente nas demonstrações por absurdo.

Tendo conhecimento de meia dúzia de procedimentos, é possível obter 10 num exame (mas não notas altas). No entanto, tais estudantes estão sujeitos a diversas rasteiras (nomeadamente provocadas por erros de cálculo).

A necessidade de estudar as demonstrações deve ir aumentando à medida que se avança no nível de ensino; em certos casos (e níveis) um exemplo pode ser mais elucidativo do que uma demonstração. Parece-me, no entanto, grave que um jovem acabe o 12.° ano de Matemática convencido de que a veracidade de uma proposição matemática se estabelece com alguns exemplos: temo que seja isso que esteja a acontecer; dar exemplos é útil! O que se deveria também dizer é que há sempre necessidade de uma demonstração (que pode ser omitida naquele nível de ensino).

Fala-se na beleza da matemática. Onde a encontramos, na teoria ou na resolução de exercícios?

A matemática foi, desde sempre, quer um meio de resolver problemas práticos quer apenas uma actividade intelectual; ao longo do seu desenvolvimento histórico, estes aspectos estiveram sempre presentes. Penso, pois, que os dois aspectos teoria/aplicações deverão sempre estar presentes. Para mim, um dos aspectos mais belos da matemática consiste no facto de teorias desenvolvidas sem nenhuma relação com aplicações virem a encontrar aplicações.M