por **António Pereira Rosa**
[Escola Secundária Maria Amália Vaz de Carvalho]

# A Transformação de Tschirnhaus

Em 1683, o matemático germânico Ehrenfried Walter von Tschirnhaus apresentou um novo processo para a resolução de equações polinomiais. Desde os algebristas italianos do século XVI até Abel, foram feitas tentativas de resolução de equações de grau arbitrário por meio de radicais. Este método, posteriormente desenvolvido e generalizado por Bring e Jerrard, foi talvez aquele que mais próximo esteve do sucesso.

## 1. Introdução

O primeiro passo para a resolução da equação do terceiro grau $ax^3+bx^2+cx+d=0$ é a eliminação do termo quadrático por meio da substituição $y=x+b/3a$, que alguns autores atribuem a Tartaglia. Obtém-se uma equação da forma $x^3+px+p=0$, que pode então ser resolvida por diversos métodos, como o processo original de del Ferro, Tartaglia e Cardano, o método de Lagrange ou a famosa "substituição milagrosa" de Viète (veja-se [1], página 80). Neste trabalho vamos estudar um método, publicado em 1683, que se deve ao matemático germânico Ehrenfried Walter von Tschirnhaus (ou Tschirnhausen), que viveu de 1651 a 1708. De todas as tentativas de resolução de equações polinomiais de grau arbitrário por meio de radicais, este método e as suas generalizações foram os que mais se aproximaram do objectivo final (que, desde os trabalhos de Ruffini, Abel e Galois, sabemos ser, em última análise, inatingível).

A ideia de Tschirnhaus é simples: já que se consegue suprimir o termo em $x^2$ por meio de uma mudança de variável afim, talvez seja possível desembaraçar a equação dos termos em $x^2$ e em $x$ por meio de uma mudança de variável quadrática $y=x^2+\alpha x+\beta$, com $\alpha$ e $\beta$ coeficientes a determinar, obtendo-se uma equação binomial $y^3=k$, de resolução imediata[1]. Como vamos ver, a ideia está correcta, mas a determinação destes coeficientes é extremamente morosa; sugerimos ao leitor interessado em refazer alguns dos nossos cálculos a utilização de *software* de cálculo simbólico adequado, como o *Derive*, o *Mathematica* ou o *Maxima*.

## 2. A substituição de Tschirnhaus

É fácil de ver que há equações do terceiro grau que não podem ser reduzidas à forma binomial por meio de uma mudança de variável afim; a tentativa de fazer essa redução por meio de uma sequência finita de tais transformações fracassa também, uma vez que a composta de duas transformações afins é ainda uma transformação afim. Concentremo-nos então nas mudanças de variáveis quadráticas, começando por recordar alguns resultados que nos vão ser necessários (apresentamos versões adequadas às nossas necessidades; os dois teoremas seguintes são muito mais gerais).

**Teorema 1 (Fórmulas de Viète)** *Dado um polinómio $p(x)=x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$, de raízes[2] $x_1$, $x_2$ e $x_3$, então $a_1=-(x_1+x_2+x_3)$; $a_2=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$; $a_3=x_1x_2x_3$.*

[1] Uma alternativa interessante é o uso de uma mudança de variável de tipo homográfico ou de Möbius, conforme se pode ver em [2].

[2] Reais ou complexas e tendo em conta as multiplicidades.

*Em particular, se* $p(x)=x^3+px+q$*, então tem-se que* $0=-(x_1+x_2+x_3)$, $p=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$ *e* $q=-x_1x_2x_3$.

**Demostração** Basta desenvolver o segundo membro da identidade $x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=(x-x_1).(x-x_2).(x-x_3)$ e igualar os coeficientes das potências do mesmo grau.

**Teorema 2 (Fórmulas de Newton)** *Dadas as três indeterminadas* $x_1$, $x_2$ *e* $x_3$*, sejam* $s_k=\sum_{i=1}^{3} x_i^k$ *e*

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3$$
$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$
$$\sigma_3 = x_1x_2x_3.$$

*Então tem-se*

$$s_1 = \sigma_1$$
$$s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$$
$$s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$$
$$s_4 = s_3\sigma_1 - s_2\sigma_2 + s_1\sigma_3$$
$$s_5 = s_4\sigma_1 - s_3\sigma_2 + s_2\sigma_3$$
$$s_6 = s_5\sigma_1 - s_4\sigma_2 + s_3\sigma_3.$$

**Demonstração** Não vamos apresentá-la; o leitor interessado pode consultar a referência [3] .

Considerem-se então as equações

$$x^3 + px + q = 0 \qquad (1)$$
$$y^3 + r = 0 \qquad (2)$$

em que (1) é a equação dada e (2) é a sua transformada por meio da substituição $y=x^2+\alpha x+\beta$. Sejam ainda $x_1$, $x_2$ e $x_3$ as raízes de (1) e $y_1$, $y_2$ e $y_3$ as raízes de (2).

Escrevamos as expressões dos $s_j$ ($j$=1,2,3,4,5,6) para as raízes da equação (1). Pelas fórmulas de Viète, tem-se

$$\sigma_1(x_i) = s_1(x_i) = 0$$
$$\sigma_2(x_i) = p$$
$$\sigma_3(x_i) = -q$$

donde, atendendo a que $\sigma_1(x_i)=0$, se segue das fórmulas de Newton que

$$s_1(x_i) = 0 \qquad (3)$$
$$s_2(x_i) = -2p \qquad (4)$$
$$s_3(x_i) = -3q \qquad (5)$$
$$s_4(x_i) = 2p^2 \qquad (6)$$
$$s_5(x_i) = 5pq \qquad (7)$$
$$s_6(x_i) = -2p^3 + 3q^2. \qquad (8)$$

Procedendo de igual forma para a equação (2), temos

$$\sigma_1(y_i) = s_1(y_i) = 0$$
$$\sigma_2(y_i) = 0$$
$$\sigma_3(y_i) = -r$$

e

$$s_1(y_i)=0$$
$$s_2(y_i)=0$$
$$s_3(y_i)=-3r$$
$$s_4(y_i)=0$$
$$s_5(y_i)=0$$
$$s_6(y_i)=3r^2$$

Por outro lado, como $y_i=x_i^2+\alpha x_i+\beta$, vem

$$\begin{aligned} s_1(y_i) &= y_1+y_2+y_3 \\ &= (x_1^2+\alpha x_1+\beta)+(x_2^2+\alpha x_2+\beta)+(x_3^2+a\,x_3+\beta) \\ &= (x_1^2+x_2^2+x_3^2)+\alpha(x_1+x_2+x_3)+3\beta \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} s_2(y_i) &= y_1^2+y_2^2+y_3^2 \\ &= (x_1^2+\alpha x_1+\beta)^2+(x_2^2+\alpha x_2+\beta)^2+(x_3^2+\alpha x_3+\beta)^2 \\ &= (x_1^4+x_2^4+x_3^4)+2\alpha(x_1^3+x_2^3+x_3^3)+(\alpha^2+2\beta)\times(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+ \\ &\quad +2\alpha\beta(x_1+x_2+x_3)+3\beta^2. \end{aligned}$$

Tendo então em conta que $s_1(y_i)=s_2(y_i)=0$, obtemos o sistema

$$\begin{cases} s_2(x_i)+\alpha s_1(x_i)+3\beta=0 \\ s_4(x_i)+2\alpha s_3(x_i)+(\alpha^2+2\beta)s_2(x_i)+2\alpha\beta\, s_1(x_i)+3\beta^2=0 \end{cases}$$

o qual, considerando as expressões anteriormente obtidas para $s_j(x_i)$, se pode escrever na forma

$$\begin{cases} -2p+\alpha\cdot 0+3\beta=0 \\ 2p^2+2\alpha(-3q)+(\alpha^2+2\beta)\cdot(-2p)+2\alpha\beta\cdot 0+3\beta^2=0 \end{cases}$$

ou, após simplificações óbvias mas morosas,

$$\begin{cases} \beta=2p/3 \\ p\alpha^2+3q\alpha-p^2/3=0. \end{cases}$$

A última equação deste sistema é do segundo grau em $\alpha$; escolhendo uma qualquer[3] das suas raízes, está concluída a determinação dos coeficientes da mudança de variável. Falta, no entanto, obter a equação transformada: não é, em princípio, tarefa fácil[4] eliminar $x$ no sistema

$$\begin{cases} x^3+px+q=0 \\ y=x^2+\alpha x+\beta. \end{cases}$$

Procederemos por via indirecta: dada a equação transformada $y^3+r=0$, de raízes $y_1$, $y_2$ e $y_3$, tem-se imediatamente $y_1^3+y_2^3+y_3^3=-3r$. Atendendo a que $y_i=x_i^2+\alpha x_i+\beta$, segue-se que

$$r=\frac{y_1^3+y_2^3+y_3^3}{-3}=\frac{\sum_{i=1}^{3}(x_i^2+\alpha x_i+\beta)^3}{-3} \qquad (9)$$

[3]É indiferente qual delas se escolhe, como veremos.
[4]Veremos mais adiante que este problema se pode simplificar bastante recorrendo à *resultante*.

Desenvolvendo os cálculos de forma semelhante ao feito anteriormente[5] para $s_2(y_i)$, podemos determinar o valor de $r$. Uma vez resolvida a equação $y^3+r=0$, as suas três soluções $y_1$, $y_2$ e $y_3$ permitem determinar seis[6] possíveis soluções para a equação original, já que $y_i=x_i^2+\alpha x_i+\beta$; por substituição na equação original, eliminam-se as soluções estranhas.

**3. Um exemplo**

Nesta secção vamos resolver a equação $x^3+3x+5/6=0$ pelo método de Tschirnhaus.

Tem-se $p=3$ e $q=5/6$. Comecemos por determinar os coeficientes $\alpha$ e $\beta$ da substituição. Obtém-se o sistema

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{2\times 3}{3} \\ 3\alpha^2 + 3\times\dfrac{5}{6}\alpha - \dfrac{3^2}{3} = 0 \end{cases}$$

cuja solução é

$$\begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = -3/2 \vee \alpha = 2/3. \end{cases}$$

Escolhendo, por exemplo, a solução $\alpha=-3/2$ e $\beta=2$, a substituição é $y=x^2-\frac{3}{2}x+2$. Para determinar $r$ na equação transformada, devemos começar por obter $s_j(x_i)$ ($j=1,2,\ldots,6$). Substituindo $p=3$ e $q=5/6$ nas equações (3)-(8), temos que

$$\begin{aligned} s_1(x_i) &= 0 \\ s_2(x_i) &= -6 \\ s_3(x_i) &= -5/2 \\ s_4(x_i) &= 18 \\ s_5(x_i) &= 25/2 \\ s_6(x_i) &= -623/12. \end{aligned}$$

Efectuando os cálculos na equação (9), vem

$$r = \frac{8s_6 - 36s_5 + 102s_4 - 171s_3 + 204s_2 + 192}{-3\times 8}$$

Substituindo os valores de $s_j(x_i)$ ($j=1,2,\ldots,6$) e simplificando, chega-se finalmente a

$$r = -\frac{2197}{144}$$

Temos pois de resolver a equação $y^3=2197/144$; as suas soluções são

$$\sqrt[3]{\frac{2197}{144}},\ \sqrt[3]{\frac{2197}{144}}\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \text{ e } \sqrt[3]{\frac{2197}{144}}\operatorname{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right).$$

Em seguida, devem resolver-se as três equações quadráticas

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{3}{2}x + 2 - \sqrt[3]{\frac{2197}{144}} &= 0 \\ x^2 - \frac{3}{2}x + 2 - \sqrt[3]{\frac{2197}{144}}\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right) &= 0 \\ x^2 - \frac{3}{2}x + 2 - \sqrt[3]{\frac{2197}{144}}\operatorname{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right) &= 0. \end{aligned}$$

[5]Não vamos explicitar todos os cálculos, uma vez que estes são muito morosos; veja-se o exemplo da secção seguinte e as observações sobre a resultante.

[6]Repare-se que, ao contrário das transformações vistas anteriormente, a transformação $y_i=x_i^2+\alpha x_i+\beta$ não é invertível; Tschirnhaus aparentemente não se apercebeu deste problema.

Finalmente, por substituição na equação original, eliminam-se as três soluções estranhas. Apresentamos apenas o resultado final, obtido por meio do *Derive*.

**Primeira solução (real)**

$$\frac{3}{4}-\sqrt[6]{\frac{6877\sqrt[3]{12}}{1024}-\frac{3887\sqrt[3]{18}}{384}+\frac{452929}{36864}}$$

**Segunda solução**

Parte real:

$$\frac{-3^{2/3}\times\sqrt{\sqrt{\frac{1587\times 3^{1/3}}{4}+1352\times 2^{1/3}+299\times 6^{2/3}}-\frac{23\times 3^{2/3}}{2}-13\times 2^{2/3}}}{12}+\frac{3}{4}$$

Parte imaginária:

$$\frac{-3^{2/3}\times\sqrt{\sqrt{\frac{1587\times 3^{1/3}}{4}+1352\times 2^{1/3}+299\times 6^{2/3}}+\frac{23\times 3^{2/3}}{2}+13\times 2^{2/3}}}{12}$$

**Terceira solução**

Trata-se, obviamente, do complexo conjugado da segunda solução.

Este exemplo mostra que o método de Tschirnhaus (como, em geral, todos os métodos não numéricos para a resolução de equações de grau superior ao segundo) tem um interesse *prático* reduzido[7]; não deixa de ser elucidativo constatar que com uma simples calculadora se obtêm as soluções da equação $x^3+3x+5/6=0$ com nove casas decimais:

$$x_1 \approx -0{,}271133778$$
$$x_2 \approx 0{,}135566889+1{,}747894489i$$
$$x_3 \approx 0{,}135566889-1{,}747894489i$$

A conhecida fórmula de Tartaglia para a equação $x^3+px+q=0$,

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

dá também resultados muito mais satisfatórios, obtendo-se, após algumas simplificações triviais, a raiz $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$.

Comparando os resultados obtidos pelos métodos de Tschirnhaus e Tartaglia, obtém-se uma curiosa igualdade[8] envolvendo números irracionais:

$$\frac{3}{4}-\sqrt[6]{\frac{6877\sqrt[3]{12}}{1024}-\frac{3887\sqrt[3]{18}}{384}+\frac{452929}{36864}}=\sqrt[3]{\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$$

Antes de abordarmos as generalizações e algumas importantes consequências teóricas do método de Tschirnhaus, veremos como se pode simplificar bastante a determinação da equação transformada recorrendo à

[7] A este respeito consulte-se também [3] ou [4].
[8] Que seria certamente muito difícil de justificar de forma directa...

*resultante* de dois polinómios[9], uma ferramenta de que Tschirnhaus não dispunha. Supondo já determinados $\alpha$ e $\beta$, consideremos o sistema nas incógnitas $x$ e $y$

$$\begin{cases} x^3 + px + q = 0 \\ x^2 + \alpha x + \beta - y = 0. \end{cases}$$

Vamos eliminar $x$ recorrendo à resultante. Tem-se

$$Res_x(x^3 + px + q,\ x^2 + \alpha x + \beta - y) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & p & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & p & q \\ 1 & \alpha & 2p/3-y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 2p/3-y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & 2p/3-y \end{vmatrix}$$

O valor deste determinante é

$$-y^3 + \left(\frac{p^2}{3} - \alpha^2 p - 3\alpha q\right)y + \frac{2p^3}{27} + \frac{2\alpha^2 p^2}{3} + \alpha pq + q^2 - q\alpha^3$$

Igualando a zero[10] e tendo em conta que $\frac{p^2}{3} - \alpha^2 p - 3\alpha q = 0$ (é a equação que $\alpha$ deve verificar, como se viu anteriormente), tem-se a equação transformada

$$-y^3 + \frac{2p^3}{27} + \frac{2\alpha^2 p^2}{3} + \alpha pq + q^2 - q\alpha^3 = 0$$

que se pode escrever na forma

$$y^3 = -\frac{9q^3\alpha}{p^2} - \frac{4\alpha pq}{3} + \frac{8p^3}{27} + 2q^2 \qquad (10)$$

se repararmos que de $\frac{p^2}{3} - \alpha^2 p - 3\alpha q = 0$ se deduz sucessivamente que

$$\alpha^2 = \frac{p}{3} - \frac{3\alpha q}{p}$$

e que

$$\alpha^3 = \frac{p\alpha}{3} - q + \frac{9\alpha q^2}{p^2}.$$

Por substituição dos valores de $\alpha$, $p$ e $q$ na equação (10), obtém-se novamente a equação transformada $y^3$=2197/144.

## 4. Desenvolvimentos posteriores do método

Tschirnhaus tinha um objectivo muito mais ambicioso do que apresentar apenas um novo método para resolver a equação cúbica[11]; ele pretendia reduzir uma qualquer equação de grau $n$ a uma equação do tipo $y^n=k$, o que resolveria definitivamente o problema da determinação exacta[12] das raízes de polinómios. Para tanto, começou por observar que o método que desenvolvera para a equação cúbica podia ser usado para eliminar os

[9] Para a definição e para as propriedades básicas da resultante, veja-se o Apêndice.
[10] Veja-se a Proposição 4 do Apêndice.
[11] Ou a quártica: Tschirnhaus abordou este último problema reduzindo a equação geral do quarto grau a uma equação biquadrada por meio de uma substituição *quadrática* conveniente, apresentando assim uma alternativa ao conhecido método de Ferrari. É de referir que a equação geral do quarto grau pode ser reduzida à forma binomial $y^4=k$ por meio de uma substituição *cúbica*; vejam-se [5] e [6].
[12] Em princípio, por meio de radicais, o tipo de resolução que os matemáticos da época procuravam.

termos de grau $n$-1 e $n$-2 numa equação de grau $n$, o que está correcto; em particular, a equação do quinto grau $x^5+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5=0$ pode ser reduzida à chamada *forma principal* $x^5+b_3x^2+b_4x+b_5=0$. O passo seguinte seria remover o termo em $x^2$, passando a uma equação do tipo $x^5+c_4x+c_5=0$, que é actualmente conhecida por *forma de Bring-Jerrard*; aparentemente por analogia com as equações do terceiro grau, pensou que isso seria possível por meio de uma substituição cúbica, $z=x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$. Infelizmente, a tentativa falhou, pois a determinação dos coeficientes $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ conduz a uma equação do sexto grau (veja-se [7]). Em 1796, o matemático sueco Erland Samuel Bring (1736-1798) foi bem sucedido onde Tschirnhaus falhara, conseguindo passar da equação geral do quinto grau para a forma que tem o seu nome, recorrendo a uma substituição *quártica*, $z=x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$, e a uma série de artifícios sumamente engenhosos. Este notável trabalho passou, no entanto, despercebido. Os resultados de Bring foram recuperados e generalizados de forma independente em 1835 pelo matemático inglês George Birch Jerrard (1804-1863). Concretamente, Jerrard conseguiu por meio de uma substituição conveniente remover os termos de grau $n$-1, $n$-2 e $n$-3 na equação geral de grau $n$. Infelizmente, as suas esperanças de resolver equações de grau arbitrário foram desfeitas pelo famoso matemático irlandês Sir William Rowan Hamilton (1805-1865), que, no seu relatório sobre os trabalhos de Jerrard, apontou uma série de limitações que inviabilizavam essa ideia[13]. Jerrard não ficou convencido com os argumentos de Hamilton e gerou-se uma longa e acerba polémica que acabou por dar razão a este último e que teve como principal aspecto positivo contribuir para desenvolver e tornar mais conhecidos os trabalhos de Abel e Galois sobre resolubilidade de equações algébricas[14].

Voltando à equação quíntica, os resultados referidos anteriormente mostram que se fosse possível resolver por meio de radicais as quínticas na forma de Bring-Jerrard, seria possível resolver por meio de radicais qualquer quíntica, o que, como se sabe, é impossível[15]. É, no entanto, fácil de ver que qualquer quíntica na forma de Bring-Jerrard pode ser escrita na forma $y^5+y-c=0$, um tipo de equação cujas raízes são conhecidas como *ultrarradicais* ou *radicais de Bring*. Assim, podemos resumir os resultados anteriores dizendo que qualquer quíntica pode ser resolvida por meio de radicais e de ultrarradicais. As transformações anteriores foram também essenciais em estudos posteriores da equação do quinto grau, como a sua resolução por Charles Hermite (1822-1901) em termos de funções modulares elípticas ou a famosa resolução de Felix Klein (1849-1925) por meio de funções hipergeométricas; refira-se que Hermite tinha grande admiração pelos resultados de Jerrard, que considerava serem os maiores avanços no estudo da equação do quinto grau desde os trabalhos de Abel. M

### Referências bibliográficas

[1] **Toth, G.** (2002) - *Glimpses of Algebra and Geometry* (2nd edition), Springer-Verlag, New York.

[2] **Santos, J. C.** (2005) - *Transformadas de Möbius e Equações do Terceiro Grau*, Boletim da SPM n.º52, págs. 53-58.

[3] **Kurosh, A.** (1973) - *Cours d'Algèbre Supérieure*, Éditions Mir, Moscou.

[4] **Oliveira, J. S.** (1978) - *As Equações Algébricas dos 3.º, 4.º e 5.º Graus*, Boletim da SPM n.º 1, págs. 20-31.

[5] **Boyer, C. B. e Merzbach, U. C.** (1989) - *A History of Mathematics* (2nd edition), John Wiley & Sons, New York.

[13] Mais precisamente, Hamilton mostrou que se o grau da equação a transformar estiver abaixo de um certo valor, a transformação proposta conduz a um múltiplo da equação e é portanto inútil – é o que acontece no caso de uma equação quíntica, quando tentamos reduzi-la a uma equação binomial eliminando os termos de grau 4, 3, 2 e 1 (veja-se [8]).

[14] Além de alguns erros nos trabalhos de Jerrard, boa parte da polémica foi devida ao facto de a noção de resolubilidade por meio de radicais não estar ainda definida de forma muito clara; a questão foi agravada por uma má compreensão de certas partes do relatório, como a impossibilidade da resolução da equação do quarto grau pelos métodos de Jerrard.

[15] Um exemplo de equação não resolúvel por meio de radicais sobre Q é $x^5-6x+3=0$; veja-se [9].

[6] **Estrada, M. F., Sá, C. C., Queiró, J. F., Silva, M. C. e Costa, M. C.** (2000) - *História da Matemática, Universidade Aberta, Lisboa.*

[7] **Adamchick, V. S. e Jeffrey, D. J.** (2003) - *Polinomial Transformations of Tschirnhaus, Bring e Jerrard*, ACM SIGSAM Bulletin, Vol. 37, No. 3, September (disponível em http://www.apmaths.uwo.ca/~djeffrey /Offprints/ Adamchick.pdf).

[8] **Hamilton, W. R.** (1836) - *Inquiry into the validity of a method recently proposed by George B. Jerrard, Esq., for transforming and resolving equations of elevated degrees*, British Association Report (págs. 295-348), Bristol (editado em 2000 por David R. Wilkins e disponível em http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath /People/Hamilton/Jerrard/).

[9] **Monteiro, A. J. e Matos, I.** (1995) - *Álgebra Um Primeiro Curso*, Escolar Editora, Lisboa.

[10] **Costa, A. A.** (1968) - *Cours d'Algèbre Générale* (Vol. II), Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.

**Bibliografia**

**Garcia, A. e Lequain, Y.** (1988) - *Álgebra: um curso de introdução*, Projecto Euclides, Rio de Janeiro.

**Gonçalves, A.** (1979) - *Introdução à Álgebra*, Projecto Euclides, Rio de Janeiro.

**Hollingdale, S.** (1991) - *Makers of Mathematics*, Penguin Books, London.

**MacLane, S. e Birkhoff, G.** (1979) - *Algebra* (Second Edition), MacMillan Publishing Company, Inc., New York.

**Struik, D. J.** (1992) - *História Concisa das Matemáticas* (2.ª edição), Gradiva, Lisboa.

Consultámos ainda o *site* www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians (School of Mathematics and Statistics, University of St. Andrews, Scotland), no qual se podem obter indicações biográficas detalhadas acerca dos diversos matemáticos referidos.

## Apêndice

### Algumas propriedades da resultante

Neste apêndice vamos recordar a definição e algumas propriedades da resultante de dois polinómios, indicar sem demonstração[16] algumas das suas propriedades e apresentar algumas aplicações. Não procuraremos trabalhar com a maior generalidade possível, antes apresentaremos apenas os resultados de forma adequada às nossas necessidades.

Dados os polinómios $p(x)=a_0x^n+....a_n$ e $q(x)=b_0x^s+....b_s$, de coeficientes reais, com graus $n$ e $s$, respectivamente (logo $a_0b_0\neq 0$), sejam $\alpha_1,...,\alpha_n$ os zeros de $p$ e $\beta_1,...,\beta_s$ os zeros de $q$ no corpo C dos números complexos[17]. A resultante de $p$ e $q$, que representaremos por $Res(p,q)$, é o número definido por

$$Res\left(p,q\right)=a_0^s b_0^n \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{s}(\alpha_i-\beta_j)$$

É consequência imediata da definição a seguinte

**Proposição 1** *Dois polinómios $p$, $q \in R[x]$ têm um zero comum se e só se $Res(p,q)=0$.*

Tem-se ainda a seguinte fórmula alternativa para a resultante:

**Proposição 2**

$$Res\left(p,q\right)=a_0^s\prod_{i=1}^{n}q\left(\alpha_i\right)$$

É de reparar que, em geral, $Res(p,q)\neq Res(q,p)$: com as notações anteriores, resulta quase imediatamente da definição que $Res(p,q)=(-1)^{ns}Res(q,p)$.

Se não houvesse outra maneira de calcular a resultante sem ser pelas fórmulas anteriores, o seu anulamento seria obviamente um critério totalmente inútil para o estudo dos zeros comuns de dois polinómios[18], já que o seu cálculo pressupõe o conhecimento dos zeros dos polinómios em causa. Tem-se, no entanto, o seguinte resultado:

**Proposição 3** *Consideremos dois polinómios $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n$ e $q(x)=b_0x^s+b_1x^{s-1}+...+b_s$, de graus $n$ e $s$, respectivamente. Então, $Res(p,q)$ é igual ao valor do seguinte determinante:*

$$\begin{vmatrix}
a_0 & a_1 & \dots & a_n & & & & \\
 & a_0 & a_1 & \dots & a_n & & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 & & a_0 & a_1 & \dots & a_n & & \\
b_0 & b_1 & \dots & b_s & & & & \\
 & b_0 & b_1 & \dots & b_s & & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 & & b_0 & b_1 & \dots & b_s & &
\end{vmatrix}$$

*Neste determinante, subentende-se que os elementos correspondentes aos espaços em branco são iguais a zero e que nele vão surgir $s$ linhas do tipo $a_0 a_1...a_n$ e $n$ linhas do tipo $b_0 b_1...b_s$.*

**Exemplo**

Seja $p(x)=ax^2+bx+c$ um polinómio de segundo grau, então $p'(x)=2ax+b$. Vamos calcular $Res(p,p')$. Vem

[16] O leitor interessado pode consultar [3] ou [10].

[17] Contados de acordo com a sua multiplicidade, em ambos os casos; no que se vai seguir, poderíamos trabalhar apenas num corpo sobre o qual estes dois polinómios se decompusessem em factores lineares como, por exemplo, o corpo de decomposição de $pq$.

[16] Estudo esse que, aliás, se pode fazer por aplicação do algoritmo de Euclides em $R[x]$.

$$Res\,(p,q')=\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & b & 0 \\ 0 & 2a & b \end{vmatrix}=-a(b^2-4ac).$$ Atendendo a que $a\neq0$ e a que uma raiz $\alpha$ de um polinómio $p$ do segundo grau é dupla quando $p'(a)=0$, obtemos por aplicação da Proposição 1 a conhecida regra para a existência de uma raiz dupla na equação $ax^2+bx+c=0$: $\Delta=b^2-4ac=0$.

O nosso interesse na resultante está relacionado com a sua aplicação à resolução de sistemas de duas equações polinomiais com duas incógnitas, tendo em vista a sua utilização na determinação da equação transformada no método de Tschirnhaus.

Sejam então $p$ e $q$ polinómios em duas indeterminadas $x$ e $y$, que vamos escrever ordenados segundo as potências decrescentes de $x$:

$p(x,y)=a_0(y)x^k+a_1(y)x^{k-1}+\ldots+a_{k-1}(y)x+a_k(y)$

e

$q(x,y)=b_0(y)x^l+b_1(y)x^{l-1}+\ldots+b_{l-1}(y)x+ba_l(y)$.

Estamos interessados na resolução do sistema

$$\begin{cases} a_0(y)x^k+a_1(y)x^{k-1}+\cdots+a_{k-1}(y)x+a_k(y)=0 \\ b_0(y)x^l+b_1(y)x^{l-1}+\cdots+b_{l-1}(y)x+b_l(y)=0 \end{cases}$$

Vamos representar por $Res_x(p,q)$ a resultante dos polinómios $p$ e $q$, considerados como polinómios na indeterminada $x$. Tem-se o seguinte resultado correspondente à Proposição 1:

**Proposição 4** *Se* $x=\alpha$, $y=\beta$ *é uma solução do sistema anterior, então* $\beta$ *é um zero de* $Res_x(p,q)$, *reciprocamente, se* $\beta$ *é um zero de* $Res_x(p,q)$ *ou os polinómios* $p(x,\beta)$ *e* $q(x,\beta)$ têm *um zero comum ou os coeficientes dos seus termos de maior grau são nulos:* $a_0(\beta)=b_0(\beta)=0$.

Este resultado reduz a pesquisa das soluções do sistema anterior à resolução de uma equação com uma só incógnita; diz-se que a incógnita $x$ foi *eliminada* do sistema. Uma das suas aplicações é precisamente justificar a utilização da resultante no método de Tschirnhaus.