por Bernard Hodgson
[Departamento de Matemática e Estatística - Universidade Laval, Québec]

Uma Breve História da Quinta Operação

Para René Descartes, a extracção de raízes — em particular de raízes quadradas — tem um lugar especial na aritmética, ao lado das quatro operações usuais. Neste texto, são apresentados vários algoritmos desenvolvidos ao longo dos tempos para a extracção destas raízes. Propõe-se ao leitor um périplo desde a Antiguidade até aos dias de hoje, reencontrando métodos que foram desenvolvidos em diversos lugares e momentos da história da matemática.

1. Introdução

Por muito que se recue no tempo em matemática, a extracção da raiz quadrada suscitou sempre muito interesse. Claramente de alcance geométrico — trata-se, conforme o seu nome aliás indica, da aresta de um quadrado de área dada —, a raiz quadrada é, de um ponto de vista aritmético, uma operação com uma complexidade de cálculo que não é banal. Pelo menos para Descartes, a extracção de raízes (nomeadamente quadradas) ocupa um lugar privilegiado em aritmética, na companhia das quatro operações usuais:

> *"(...) toda a aritmética é apenas composta por quatro ou cinco operações, que são: a adição, a subtracção, a multiplicação, a divisão e a extracção das raízes, que pode ser entendida como uma espécie de divisão (...)"* ([3, p. 1])

Esta observação de Descartes encontra-se mesmo no princípio de La Géometrie, numa secção em que ele explica *«como o cálculo aritmético se reporta às operações da geometria»*. Seguem-se comentários em que Descartes indica como efectuar com régua e compasso não apenas a adição e a subtracção, mas também a multiplicação e a divisão — com ajuda de triângulos semelhantes bem escolhidos — e a extracção da raiz quadrada. Neste último caso, também usa triângulos semelhantes construídos através do traçado de uma perpendicular ao diâmetro de um semi-círculo, como se indica na figura 1. Notemos que esta construção se encontra duas vezes nos *Elementos* de Euclides, na proposição 13 do Livro VI, quando se pretende construir o meio proporcional entre dois segmentos de recta dados e também na proposição II.14, quando se pretende «quadrar» uma figura poligonal dada, isto é, transforma-la num quadrado com a mesma área.

Nos nossos dias, uma simples calculadora de bolso torna o cálculo de uma raiz quadrada absolutamente banal — na medida em que a precisão desejada não ultrapasse o número de algarismos que comporta o seu ecrã. Mas é evidente que isso nem sempre aconteceu. Através dos tempos, introduziram-se vários métodos para calcular uma raiz quadrada ou, através de algoritmos aproximados, determinar um valor aproximado com a precisão desejada.

Esta ideia de cálculo por aproximações sucessivas ocupa um lugar importante neste texto. Ela foi expressa por d'Alembert num artigo de l'*Encyclopédie* (segunda metade do século XVIII) como segue:

[*] Nota: Uma primeira versão deste texto foi publicada em francês no *Bulletin AMQ*. Vol XLVI, nº2. Maio 2006. A presente reprodução foi amavelmente autorizada pela Association Mathématique du Québec. Traduzido por Suzana Nápoles – Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa.

Se um número não é um quadrado perfeito, não se pode esperar exprimir a sua raiz quadrada exacta através de números racionais, inteiros ou fraccionários; neste caso, é preferível recorrer aos métodos de aproximação, e contentar-se com um valor que difere muito pouco do valor exacto da raiz quadrada.

(Citado em [1, pp. 227-228])

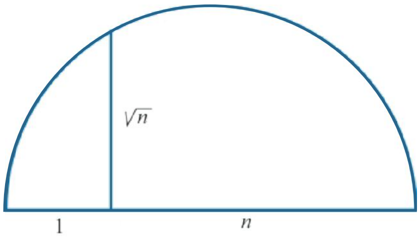

Figura 1

Neste texto pretendemos sobrevoar algumas técnicas de extracção de raiz quadrada. Os métodos que apresentamos foram desenvolvidos em diversos lugares e momentos da história da matemática e julgamos que ilustram bem a riqueza e engenho dos pontos de vista que foram adoptados nas várias épocas. O nosso périplo leva-nos primeiro à Mesopotâmia, onde veremos valores aproximados que podem ser justificados através de um argumento geométrico; depois à Grécia, com os cálculos por aproximações sucessivas que resultam do célebre método de Herão; este algoritmo é um caso particular do método de Newton-Raphson, em que intervém a derivada de uma função determinada; em seguida veremos como um valor de $\sqrt{2}$ presente na tradição matemática indiana se pode explicar mediante uma dissecação astuciosa de dois quadrados; importaremos então da tradição chinesa uma aproximação geométrica levando ao algoritmo do tipo «algarismo a algarismo» ainda ensinado há algumas décadas nas nossas escolas primárias, antes do advento das máquinas de calcular; finalmente terminaremos com uma técnica que se pode ligar à equação de Pell-Fermat.

2. A raiz quadrada na Mesopotâmia

A nossa primeira paragem leva-nos à Mesopotâmia (actual Iraque) alguns séculos antes da nossa era. A matemática desenvolvida nesta civilização chegou até nós através de pequenas tábuas de argila — foram inventariadas várias centenas — e algumas contêm inscrições relativas a raízes quadradas (por exemplo, procura-se o lado de um triângulo rectângulo, conhecendo os outros dois). Encontram-se assim como valores de $\sqrt{2}$ os números

$$1+\frac{25}{60} \tag{1}$$

e

$$1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3} \tag{2}$$

(relembremos que os Mesopotâmios usavam um sistema de numeração sexagesimal, isto é, de base sessenta). Esta última aproximação, que é aproximadamente igual a 1,41421296, em que as primeiras cinco casas decimais são exactas, encontra-se na tábua YBC 7289 da colecção da Universidade de Yale (*Yale Babylonian Collection*).[1]

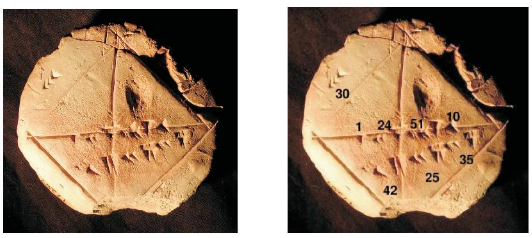

Figura 2

[1]As duas fotografias da figura 2 são retiradas do cybersite de Bill Casselman, University of British Columbia, Vancouver – ver www.math.ubc.ca/%7Ecass/Euclid/ybc/ybc.html

Esta tábua mostra-nos um quadrado com lado 30 no interior do qual se podem ler os dois números $1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}$ e $42+\frac{25}{60}+\frac{35}{60^2}$. Como

$$30\times\left(1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}\right)=42+\frac{25}{60}+\frac{35}{60^2}$$

conclui-se que $1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}$ é uma aproximação da diagonal de um quadrado de lado 1.

Não se conhece o raciocínio que terá levado os matemáticos da Mesopotâmia aos valores (1) e (2). No caso da aproximação $1+\frac{25}{60}$, podemos imaginar que se procedeu simplesmente por tentativa e erro elevando ao quadrado determinados números. O historiador Victor Katz propôs como plausível a explicação seguinte do processo que os Mesopotâmios poderão ter seguido para chegar a estes valores. Baseando-se em afirmações que figuram em alguma tábuas, Katz afirma (ver [9, p. 28]) que se trata de um método *"para o qual existe alguma evidência textual"*.

Aproximação de $\sqrt{k}$ a partir de um valor por defeito

Falando de um ponto de vista geométrico, o cálculo de $\sqrt{k}$ pode ser encarado como a procura de um quadrado com área k. Podemos procurar incluir nesse quadrado o maior quadrado possível com lado conhecido – para o efeito pode-se usar uma das numerosas tábuas de números elevados ao quadrado que os Mesopotâmios possuíam. Chamemos a ao lado do quadrado assim introduzido, e c ao pequeno segmento que é necessário juntar a a para obter o lado do quadrado com área k, isto é, $a+c=\sqrt{k}$.

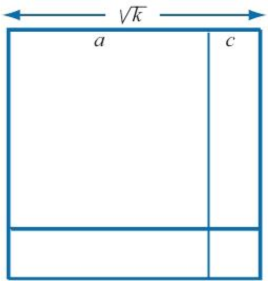

Figura 3

A determinação de um valor a' mais próximo de $\sqrt{k}$ não é mais do que encontrar uma boa aproximação de c, o que pode ser feito examinando a região em forma de «L» reflectido que envolve o quadrado de lado a — por analogia com o estilo de um relógio de sol ou ainda com um esquadro, esta região era chamada *gnómon* pelos antigos gregos (ver a definição 2 do Livro II dos *Elementos* de Euclides, onde esta expressão é introduzida em associação com um paralelogramo).

Este gnómon tem evidentemente área igual a $k-a^2$, Mas observemos que ele se pode decompor em dois rectângulos de lados a e c, mais um "pequeno" quadrado de lado c. Temos então $2ac+c^2=k-a^2$.

(Este tipo de argumento geométrico, baseado em dissecações elementares de figuras, está inegavelmente ao alcance dos povos da Mesopotâmia. Mas existe certamente um anacronismo na notação algébrica que nós utilizamos para exprimir estes factos geométricos.)

Para simplificar a discussão, pode-se desprezar o quadrado de lado c, obtendo assim a aproximação $2ac\approx k-a^2$, isto é

$$c\approx\frac{k-a^2}{2a}$$

Resulta que um melhor valor para $\sqrt{k}$ (em relação ao valor de partida a) é obtido tomando para aproximação de $a+c$ a quantidade

$$a'=a+\frac{k-a^2}{2a} \tag{3}$$

Pondo $c'=\frac{k-a^2}{2a}$ observa-se que a aproximação $c\approx c'$ é uma aproximação por excesso ($c'>c$): com efeito, uma vez que $2ac'(\approx)k-a^2$, está-se a supor que os dois rectângulos com lados a e c' têm em conjunto a mesma área que o gnómon, obrigando assim a um valor de c' superior ao de c. Resulta que a aproximação (3), $a' = a + c'$, com base num valor de partida a tomado por *defeito* (isto é, $a < \sqrt{k}$), é ela própria uma aproximação por excesso ($a' > \sqrt{k}$).

A desigualdade $a' > \sqrt{k}$ pode pois ser justificada elevando ao quadrado cada um dos seus membros.

Como $a' = \dfrac{a^2 + k}{2a}$ temos, com efeito, que $a'^2 - k = \dfrac{a^4 + 2a^2k + k^2 - 4a^2k}{4a^2} = \dfrac{(a^2 - k)^2}{4a^2}$

e assim $a'^2 - k > 0$ uma vez que o numerador e o denominador do membro da direita da última igualdade são ambos estritamente positivos.

Veremos na secção 2.4 um argumento geométrico mostrando que o aproximante a' toma sempre um valor por excesso.

Chamando b à diferença entre as áreas dos dois grandes quadrados da figura 3, isto é $b = k - a^2$, o método de aproximação em questão pode reescrever-se na forma

$$\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a} \tag{4}$$

Trata-se de uma fórmula de aproximação que se encontra regularmente ao longo dos tempos.

Aproximação de $\sqrt{k}$ a partir de um valor por excesso

O que aconteceria se em vez de um quadrado de lado a situado no interior do quadrado de área k, tomássemos um quadrado que o contivesse?

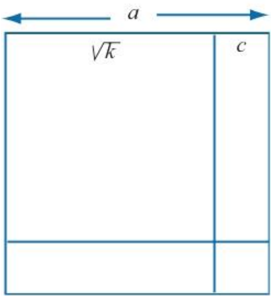

Figura 4

Tem-se então que $a - c = \sqrt{k}$. Além disso, o gnómon que contorna o quadrado com área k, cuja área é agora dada por $a^2 - k$, decompõe-se em dois rectângulos de lados a-c e c mais um "quadradinho" de lado c. Temos assim que $2(a - c)c + c^2 = a^2 - k$.

Resulta que $2ac - c^2 = a^2 - k$ (esta última expressão interpreta-se facilmente sobre o gnómon). Desprezando de novo o quadrado de lado c, obtém-se a aproximação c' tal que $2ac' = a^2 - k$, isto é,

$$c \approx c' = \frac{a^2 - k}{2a}$$

Segue que, neste caso, se obtém um melhor valor de $\sqrt{k}$ tomando para aproximação de $a - c$ a quantidade

$$a' = a - c' = a - \frac{a^2 - k}{2a} = a + \frac{k - a^2}{2a} \tag{5}$$

É interessante constatar que a "fórmula de aproximação" decorrente é exactamente a mesma (comparar as linhas (3) e (5)) seja o valor de partida a inferior ou superior a $\sqrt{k}$. Resulta que a aproximação da raiz quadrada quando baseada sobre um valor de partida a tomado *por excesso* ($a > \sqrt{k}$) é também ela por excesso ($a' > \sqrt{k}$). (Poderíamos igualmente justificar esta afirmação notando que no caso em que $a > \sqrt{k}$ a aproximação de c por c' se faz agora por defeito: $c' < c$. Com efeito, supomos que os dois rectângulos com lados a e c' têm em conjunto a mesma área que o gnómon, obrigando assim a que c' seja mais pequeno do que c, uma vez que o gnómon é formado por dois rectângulos com lados a e c *menos* o quadrado de lado c. Consequentemente a' é por excesso, uma vez que na expressão $a - c'$, se subtrai de a uma quantidade por defeito.)

Assim, o método geométrico introduzido nas secções 2.1 e 2.2 conduz sempre a uma aproximação por excesso, pelo que a única excepção possível decorre da escolha do valor inicial, que quem pretenda aplicar o método poderá eventualmente escolher por defeito. Na discussão seguinte não perdemos pois generalidade restringindo-nos ao caso de aproximações por excesso.

Como anteriormente, pode introduzir-se a diferença b entre as áreas dos dois quadrados grandes da figura 4 que, no caso, é $b = a^2 - k$. A equivalente da fórmula de aproximação (4) é então

$$\sqrt{a^2 - k} \approx a - \frac{b}{2a} \qquad (6)$$

Se aplicarmos este método no cálculo de $\sqrt{2}$ partindo do valor $1 + \frac{25}{60}$ (superior a $\sqrt{2}$), encontramos directamente limitando-nos a uma precisão com três "casas sexagemais" a expressão $1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$ da tábua YBC 7289. Deixamos os pormenores de cálculo ao cuidado do leitor.

Uma nova interpretação geométrica

Fazendo fé no anacronismo inerente a tal manipulação, simplifiquemos alegremente (e algebricamente!) a "fórmula mesopotâmica" $a + \frac{k - a^2}{2a}$; obtém-se assim facilmente

$$\frac{1}{2}\left(a + \frac{k}{a}\right) \qquad (7)$$

No cálculo de $\sqrt{k}$, esta nova forma de escrever coloca a tónica sobre os números a e $\frac{k}{a}$, onde a pode ser tomado como um valor aproximado de $\sqrt{k}$ (pouco importa a forma como ele foi obtido). E vemos ainda que estamos na presença da *média aritmética* destes dois números, $\frac{1}{2}\left(a + \frac{k}{a}\right)$ [2].

Esta visão dá lugar a uma nova interpretação geométrica. A determinação do lado do quadrado com área k pode ser feita substituindo este quadrado por um rectângulo de lados a e $\frac{k}{a}$, portanto ele também com área k — a figura seguinte ilustra o caso típico $a > \sqrt{k}$.

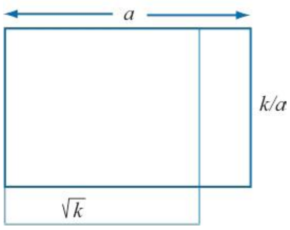

Figura 5

O rectângulo com área k e lados a e $\frac{k}{a}$ constitui assim uma aproximação do quadrado com a mesma área.

Toma-se em seguida a média aritmética $a' = \frac{1}{2}\left(a + \frac{k}{a}\right)$ dos dois lados deste rectângulo, obtendo-se assim um novo valor a' que, pelo menos no plano intuitivo, constitui uma "melhor aproximação" do lado do quadrado.

E é bem o caso! Assim, na situação ilustrada na figura 5 tem-se por um lado $a' < a$ (uma vez que a média a' está situada entre os valores a e $\frac{k}{a}$ com $\frac{k}{a} < a$) e, por outro lado, já vimos que que a' é sempre maior do que $\sqrt{k}$. Resulta então que $\sqrt{k} < a' < a$, pelo que a aproximação a' é mais próxima de $\sqrt{k}$ do que a.

Um método excessivo, como salta à vista!

A interpretação geométrica da secção 2.3 conduz a uma prova visual[3] de que o valor obtido pelo método mesopotâmico é sempre por excesso, quer o número a seja inferior ou superior a $\sqrt{k}$. Consideremos, por

[2]Convém insistir sobre o facto de que a visão em termos de média aritmética dos dois números a e k/a não se encontra explicitamente nos documentos conhecidos provenientes da época mesopotâmica.
[3]Esta demostração foi-me sugerida pelo meu colega Frédéric Gourdeau, a quem agradeço.

exemplo, o caso típico $a > \sqrt{k}$. Coloquemos um quadrado de lado $\frac{k}{a}$ dentro do rectângulo de lados a e $\frac{k}{a}$ e consideremos em seguida o quadrado de lado $a' = \frac{1}{2}\left(a + \frac{k}{a}\right)$, Como a' é a média aritmética entre a e $\frac{k}{a}$, o lado deste último quadrado está precisamente a meio caminho entre os comprimentos a e $\frac{k}{a}$. Constatando a congruência das duas regiões sombreadas da figura 6, vemos imediatamente que o quadrado de lado a' tem área superior à área do rectângulo com lados a e $\frac{k}{a}$, isto é, $a'^2 > k$. Deixamos ao cuidado do leitor o traçado de uma figura semelhante ilustrando o caso $a < \sqrt{k}$.

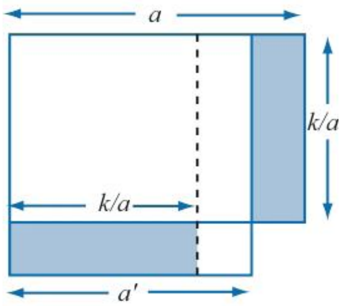

Figura 6

Até agora foi abundantemente usado o resultado seguinte:

> Independentemente do facto do valor a constituir uma aproximação de $\sqrt{k}$ por defeito ou por excesso, a aproximação $a' = a + \frac{k - a^2}{2a} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{k}{a}\right)$ é sempre por excesso, isto é, $a' > k$.

Com efeito, além da prova visual que acabámos de usar, lembremos que este resultado foi primeiro estabelecido através de um raciocínio geométrico apoiado nos gnómons (secções 2.1 e 2.2), e que demos também uma prova algébrica na secção 2.1.

Gostaríamos agora de abordar este mesmo resultado sob um outro ponto de vista.

De média em média

Prolongamos nesta secção a interpretação do método mesopotâmico baseado na noção de média aritmética. Por interessante que esta visão seja, e convém insistir de novo neste facto, ela não se encontra explicitada nos documentos da época. Contudo, faz intervir noções completamente no espírito dos matemáticos gregos da Antiguidade: além da média aritmética de dois números dados, trata-se efectivamente aqui da sua média harmónica. Recordemos a propósito que os Pitagóricos consideravam diversos tipos de "médias" (ver [5, I, pp. 85-89]), de que destacamos em particular a *média aritmética* $\frac{1}{2}(u+v)$, a *média geométrica* $\sqrt{uv}$ e a *média harmónica* $\frac{2uv}{u+v}$ de dois números u e v. Supomos na discussão que segue que $a \neq \frac{k}{a}$ pois, caso contrário, o problema da determinação de $\sqrt{k}$ estaria resolvido!

Uma forma simples de nos convencermos da validade da desigualdade $a' > k$ é apelar para um facto "clássico" em matemática elementar, a *desigualdade média geométrica – média aritmética*. Mas na realidade estamos a falar de média geométrica porquê?

O facto de substituir o quadrado de área k por um rectângulo com a mesma área e com lados a e $\frac{k}{a}$, como ilustra a figura 5, corresponde certamente à igualdade $k = a\,\frac{k}{a}$.

Mas então o lado do quadrado, que é a raiz quadrada procurada, pode-se escrever na forma

$$\sqrt{k} = \sqrt{a\,\frac{k}{a}}$$

encontrando-se no membro da direita a *média geométrica* dos números a e $\frac{k}{a}$. Ora, vimos na secção 2.3 que a aproximação a' é precisamente a média aritmética destes dois números.

Dito de outra forma, podemos reinterpretar o método mesopotâmico como consistindo em *aproximar a raiz quadrada de um número k, que pode ser encarado como a média geométrica de dois números a e* $\frac{k}{a}$ *, através da média aritmética destes números.*

Mas isto não é tudo: há uma outra média em jogo. Com efeito, uma vez obtida a aproximação a', podemos ser levados a continuar o processo de aproximação considerando um novo rectângulo com área k, mas desta vez com lados a' e $\frac{k}{a'}$. Notemos que, uma vez que $a' > \sqrt{k}$, se tem obrigatoriamente que

$$\frac{k}{a'} < \sqrt{k} < a' \tag{8}$$

Esta observação decorre directamente da igualdade $a'\ \frac{k}{a'} = k$: quando se considera um produto de dois factores, esses factores situam-se forçosamente de um lado e do outro da raiz quadrada do produto.

Ora notemos que

$$\frac{k}{a'} = \frac{k}{\frac{1}{2}\left(a + \frac{k}{a}\right)} = \frac{2\left(a\ \frac{k}{a}\right)}{a + \frac{k}{a}}$$

sendo esta última expressão exactamente a *média harmónica* dos números a e $\frac{k}{a}$.

Somos assim levados a debruçar-nos, de um modo geral, sobre a relação entre a média harmónica, a média geométrica e a média aritmética de dois números. E é aqui que intervém uma desigualdade célebre (que designamos de forma abreviada pela sigla MH-MG-MA): a média harmónica [resp. geométrica] de dois números nunca ultrapassa a sua média geométrica [resp. aritmética].

> Desigualdade MH-MG-MA
> Dados dois números reais não negativos u e v, tem-se que
> $$\frac{2uv}{u+v} \leq \sqrt{uv} \leq \frac{1}{2}(u+v)$$
> sendo as igualdades satisfeitas quando $u = v$.

Existem numerosas demonstrações deste resultado bem conhecido. Para o leitor interessado neste assunto, apresentamos algumas no Apêndice 1 deste texto.

Transpondo para o caso que nos interessa, a desigualdade MH-MG-MA toma a forma

$$\frac{2\left(a\ \frac{k}{a}\right)}{a + \frac{k}{a}} \leq \sqrt{a\ \frac{k}{a}} \leq \frac{1}{2}\left(a + \frac{k}{a}\right)$$

isto é,

$$\frac{k}{a'} \leq \sqrt{k} \leq a'$$

Sendo a igualdade $a = \frac{k}{a}$ posta de parte por trivialidade, decorre directamente a desigualdade (8):

$$\frac{k}{a'} < \sqrt{k} < a'$$

Assim, não apenas o lado a' do novo rectângulo de aproximação, que é a média aritmética de a e $\frac{a}{k}$, é superior a $\sqrt{k}$, mas o seu outro lado $\frac{k}{a'}$ é forçosamente inferior a $\sqrt{k}$, tratando-se, além disso, da média harmónica de a e $\frac{k}{a}$.

Se repetirmos este processo, a nova aproximação a'' será enquadrada por $\frac{k}{a'}$ e a' — trata-se, com efeito, da sua média aritmética! — e certamente a'' é superior a $\sqrt{k}$. Os números a'' e $\frac{k}{a''}$ constituem pois um enquadramento mais fino de $\sqrt{k}$:

$$\frac{k}{a'} < \frac{k}{a''} < \sqrt{k} < a'' < a'$$

O mesmo acontece evidentemente para as etapas seguintes a''', etc. Mas há mais. Como a' é a média aritmética entre $\frac{k}{a'}$ e a, o ponto a' situa-se precisamente no meio do intervalo separando estes dois pontos. O valor procurado, $\sqrt{k}$, encontra-se pois na metade esquerda deste intervalo. O mesmo acontece nas etapas de aproximação seguintes.

Este método de aproximar a raiz quadrada é por vezes chamado *método da média aritmética-harmónica*. É utilizado em [12, p.43][4].

3. A raiz quadrada por aproximações sucessivas: o método de Herão

Tanto quanto sei, não se encontra explicitamente nos mesopotâmios a ideia de repetir sistematicamente a sua iniciativa, isto é, retomar o cálculo a partir de cada novo valor obtido para encontrar sucessivamente uma melhor aproximação de $\sqrt{k}$. Mas esta ideia de iterações sucessivas é claramente expressa pelo matemático grego Herão de Alexandria (século I da nossa era).

A expressão $\frac{1}{2}\left(a+\frac{k}{a}\right)$ foi proposta por Herão como aproximação de $\sqrt{k}$ no Livro I da sua obra *Métricas* — obra essa perdida e reencontrada em 1896. Herão apresenta no início deste livro diversos problemas aritméticos sobre triângulos (cálculo da área e da hipotenusa do triângulo rectângulo com catetos dados, área do triângulo isósceles com lados dados etc.) e é levado, no problema 8 ([6, pp. 18-25]), a um método geral para o cálculo da área A do triângulo de que se conhecem os três lados a, b e c. É então que introduz a célebre fórmula que tem o seu nome — apesar de ela já ser provavelmente conhecida por Arquimedes (cf. [5, II, p. 322]):

$$A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \tag{9}$$

onde $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ é o semi-perímetro do triângulo. O problema 8 do Livro I termina aliás com uma "demonstração geométrica" (segundo as palavras do próprio Herão) da fórmula (9).

Mas anteriormente Herão aplica, neste mesmo problema, a sua fórmula no caso $a=7$, $b=8$ e $c=9$, pelo que tem que calcular $\sqrt{12\times5\times4\times3}=\sqrt{730}$ (nos problemas anteriores os comprimentos foram escolhidos de forma a que a extracção das raízes quadradas seja imediata: $\sqrt{25}, \sqrt{64}, \sqrt{144}$). Herão escreve então o seguinte:

[4]Veremos na próxima secção que o matemático grego Herão de Alexandria propôs um método para o cálculo de raízes quadradas em que intervem a média aritmética (7). As noções de médias aritmética, geométrica e harmónica, como referimos anteriormente, remontam à escola pitagórica, portanto mais de quinhentos anos antes de Herão. Contudo, trata-se sem dúvida de uma maneira simultaneamente elegante e inspiradora de abordar o método do alexandrino. Alem disso, mencionamos no Apêndice 1 os textos gregos antigos de onde se podem extrair ligações entre estas médias como a expressa pela desigualdade MH-MG-MA. Mas não é de forma alguma claro que tal visão pudesse ter servido de inspiração a Herão.

"Uma vez que 720 não tem lado racional, vamos extrair o lado com uma diferença muito pequena da forma seguinte. Como o primeiro número quadrado maior do que 720 é 729, que tem por lado 27, divida-se 720 por 27, fica 26 e 2/3, junta 27 e fica $53\ \frac{2}{3}$*; toma a metade, que é* $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$. *Com efeito,* $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$ *multiplicado por si próprio dá* $720\frac{1}{36}$*, pelo que a diferença (nos quadrados) é* $\frac{1}{36}$. *Se queremos tornar essa diferença ainda inferior a* $\frac{1}{36}$*, colocamos* $720\frac{1}{36}$ *acabado de encontrar no lugar de 729 e, procedendo da mesma forma*[5]*, encontraremos que a diferença (nos quadrados) é muito mais pequena do que* $\frac{1}{36}$.

(Citado em [1, p. 231])

Este texto de Herão menciona explicitamente a ideia de repetir o cálculo a partir do valor obtido, de forma a aproximar tanto quanto se desejar o valor procurado. Vemos assim surgir uma sucessão (teoricamente ilimitada) de valores $a_1, a_2, a_3, \ldots$, obtidos por iteração da "fórmula de Herão" e aproximando-se de $\sqrt{k}$, cada aproximação sendo ligada à anterior pela relação

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{k}{a_n}\right) \qquad (10)$$

Assim, é praticamente no decorrer do processo que Herão introduz a fórmula $\frac{1}{2}\left(a + \frac{k}{a}\right)$, e não diz nada quanto à maneira como chegou a esta expressão. Será que se trata de um raciocínio geométrico como o invocado na secção 2.3, onde se aproxima um quadrado por rectângulos com a mesma área? Será que ele via esta expressão simplesmente como a média aritmética dos números a e $\frac{k}{3a}$? Ou ainda será uma expressão importada de textos mais antigos ou pertencendo ao "folclore matemático" do seu tempo? Não o sabemos.

4. À procura de uma raiz de uma equação algébrica: o método de Newton-Raphson

Se $\sqrt{k}$ se interpreta geometricamente como o lado de um quadrado com área k, algebricamente trata-se de uma solução da equação $x^2 - k = 0$. Esta passagem a um quadro onde o interesse se centra nas raízes de um polinómio permite colocar em jogo um método geral de procura dos "zeros" de uma função f isto é, valores da variável x que são raízes da equação $f(x) = 0$. O leitor que guardou algumas lembranças da sua primeira cadeira de cálculo diferencial – a presente visão decorre simultaneamente da álgebra e da análise – reconheceu aqui o contexto de aplicação do método de Newton-Raphson, um tema clássico nesse quadro. Este método foi introduzido por Isaac Newton em cerca de 1670 e em 1690 simplificado pelo seu colega Joseph Raphson nas fórmulas iterativas que se usam hoje em dia. Será apenas algumas centenas de anos depois que se insistirá sobre o aspecto geométrico do método – donde a denominação "método da tangente" frequentemente utilizada –, analogamente sobre as considerações de convergência (ver [1, Chap.6]).

Seja então f uma função «bem comportada» – no nosso caso é suficiente supor que f é duas vezes derivável, o que é evidentemente o caso da função $f(x) = x^2 - k$ a que vamos aplicar Newton-Raphson. Vamos ainda supor que encontramos um certo intervalo onde se encontra uma raiz da equação $f(x) = 0$, por exemplo através do estudo da variação de sinal da função f. O método de Newton-Raphson consiste em tomar um valor arbitrário a situado "próximo" da raiz procurada, e tomar em seguida como aproximação desta raiz o ponto a' resultante da intersecção com o eixo dos x da *tangente á curva* no ponto $f(a)$.

[5]Por outras palavras, trabalhando com o «lado» $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$ em vez de 27. Lembremos de passagem que a notação $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$ significa 26+1/2+1/3.

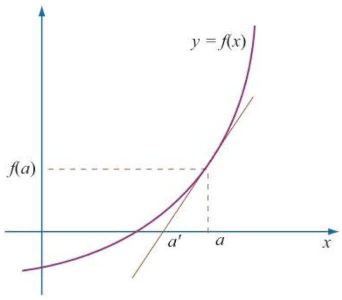

Figura 7

Uma vez que o declive desta tangente se exprime, através da função derivada f', na forma

$$f'(a) = \frac{f(a)}{a - a'}$$

obtém-se facilmente a relação seguinte para a':

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

De novo a ideia é de proceder por aproximações sucessivas, obtendo-se assim uma sucessão de valores $a_1, a_2, a_3, \ldots$, que se aproximam cada vez mais do zero da função f.

Quando aplicada à função $f(x) = x^2 - k$ a relação que exprime a' toma a forma

$$a' = a - \frac{a^2 - k}{2a} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{k}{a}\right)$$

onde se reconhecem simultaneamente a fórmula mesopotâmica e, bem entendido, a de Herão.

Um dos interesses de ligar tanto a técnica mesopotâmica como a de Herão ao método de Newton-Raphson é que se podem tirar deste quadro informações preciosas sobre a eficácia destes algoritmos. Com efeito, pode demonstrar-se com bastante facilidade que o método de Newton-Raphson *converge de forma quadrática*. Isto significa que que o erro cometido na (i+1)- ésima etapa – isto é, a diferença $e_{i+1} = x_{i+1} - \bar{x}$ entre a (i+1) aproximação x_{i+1} e o zero de f, $\bar{x}$ – exprime-se em função do quadrado do erro e_i da etapa anterior. (Este último resultado é objecto do Apêndice 2 deste texto.)

Então se nos situamos numa "boa vizinhança" da raiz procurada, por exemplo com um erro da ordem de 10^{-3}, uma nova aplicação do método mesopotâmico ou de Herão dará um erro da ordem de 10^{-6}, duplicando assim o número de casas decimais exactas. Vemos assim que estes métodos de aproximação da raiz quadrada, apesar da sua simplicidade, são de uma eficácia notável.

5. A raiz quadrada através de manipulação geométrica

Vamos buscar à tradição indiana o nosso próximo exemplo de extracção de uma raiz quadrada. Os *Sulbasutras* constituem um anexo a um conjunto de textos religiosos (os *Védeas*) e remontam a 800-600 a.C. A palavra *sulba* significa «corda»: encontram-se nos *Sulbasutras* instruções para a construção de altares para rituais religiosos, servindo a corda para medir as dimensões dos altares.

Propões-se nos *Sulbasutras* o método seguinte para o cálculo de $\sqrt{2}$ (provavelmente relacionado com o projecto de construção de um altar cuja área duplique a de um altar dado): "Aumenta a medida da sua terça parte, e essa terça parte da sua própria quarta parte menos a trinta e quatro-ésima parte desse quarta parte." ([10, p. 40]). Utiliza-se pois como aproximação de $\sqrt{2}$ a expressão

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 4} - \frac{1}{3 \times 4 \times 34} \qquad (11)$$

Esta aproximação ronda 1,414215686, sendo as cinco primeiras casas decimais exactas. Tal como acontece no caso do método mesopotâmico ou no de Herão, os autores dos *Sulbasutras* não forneceram qualquer indicação sobre os raciocínios que os levaram a este valor para $\sqrt{2}$.

Uma visão possível da expressão (11) é retomada por Joseph [7, pp. 234-236] (com base nos trabalhos de B. Datta). O argumento assenta no facto de serem dadas duas cópias de um quadrado com área 1 e de ver como «reunir» estas figuras de maneira a formar um quadrado com área 2, do qual se procurará em seguida calcular o lado. Bem entendido que uma solução geral de um problema de adição de áreas é fornecida pelo teorema de Pitágoras: o quadrado construído sobre a hipotenusa de um triângulo rectângulo tem exactamente por área a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os dois lados do ângulo recto. Mas uma tal aproximação, por mais elegante que seja no que diz respeito à ideia de adicionar áreas, não é minimamente útil quando se pretende obter um valor numérico do lado do quadrado. O argumento que encontramos em [7] assenta sobre o "*bricolage*" geométrico seguinte, no qual intervém a figura 8.

Consideremos os quadrados $ABCD$ e $PQRS$, ambos com área um. Começamos por decompor um dos quadrados dados em três bandas idênticas. Duas destas bandas (regiões 1 e 2) podem ser colocadas sobre os lados do outro quadrado. Dividindo então a terceira banda em três quadrados, tomamos um deles (região 3) para o colocar no "canto", junto às regiões 1 e 2. Resta pois colocar à volta do quadrado $ABCD$ (assim aumentado) os dois últimos quadrados, vestígios do segundo quadrado de partida. Com esse fim, dividimos cada um dos dois "quadradinhos" em quatro bandas idênticas (regiões 4 a 11) que colocamos como é indicado na figura 8.

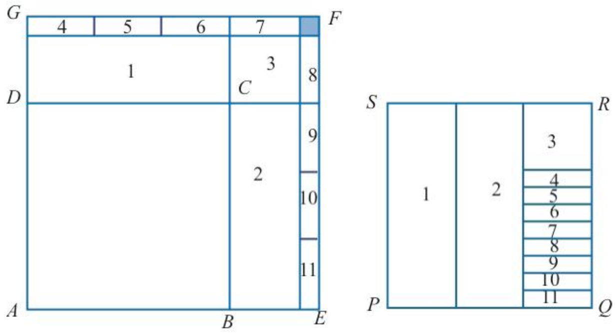

Figura 8

Neste momento o primeiro quadrado $ABCD$ foi transformado num grande quadrado $AEFG$ com lado

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\times 4}=1\frac{5}{12} \tag{12}$$

Contudo, a área deste grande quadrado excede o dobro da área de $ABCD$, uma vez que o quadradinho sombreado situado junto ao vértice F não foi coberto por fragmentos provenientes do quadrado $PQRS$. Ora este quadradinho tem área igual a $\left(\frac{1}{3\times 4}\right)^2$. É pois necessário, para equilibrar o todo, "repartir" este quadradinho ao longo dos lados do quadrado $AEFG$ recortando-o.

Com essa finalidade, imaginemos que tiramos três bandas estreitas, cada uma de largura x do quadrado $AEFG$ – por exemplo, tiramos uma primeira banda ao longo de AG e outra em baixo, ao longo de AE. Supomos, bem entendido, que estas duas bandas totalizam uma área igual a $\left(\frac{1}{3\times 4}\right)^2$ de forma que

$$2x\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\times 4}\right)-x^2=\left(\frac{1}{3\times 4}\right)^2$$

Desprezando o termo x^2, esta última equação, depois de simplificada, conduz a $x\approx\frac{1}{3\times 4\times 34}$, tal como pretendíamos.

Observemos que a análise geométrica anterior é apenas válida para o caso de $\sqrt{2}$, isto é, quando se procura duplicar a área de um quadrado.

Katz [9, p. 28] propõe outra interpretação da aproximação (11) para $\sqrt{2}$. Tomando como ponto de partida o valor $1\frac{5}{12}$, que figura em (12), ele aplica a aproximação mesopotâmica $a' = a - \dfrac{a^2 - k}{2a}$ — ver em (5) —, obtendo assim directamente a aproximação indiana de $\sqrt{2}$:

$$\frac{17}{12} - \frac{\left(\frac{17}{12}\right)^2 - 2}{2 \times \frac{17}{12}} = \frac{17}{12} - \frac{\frac{1}{144}}{\frac{34}{12}} = \frac{17}{12} - \frac{1}{3 \times 4 \times 34}$$

Aliás, Neugebauer escreve a este respeito: "Não me parece de excluir a possibilidade de que tanto o termo principal como a correcção subtraída sejam, em última instância, baseados nas duas aproximações babilónicas." ([11, p. 35])

6. A raiz quadrada "algarismo a algarismo": visões geométrica e algébrica do algoritmo usual

O próximo exemplo de método de extracção da raiz quadrada leva-nos para os lados da antiga China. O livro *Os nove capítulos sobre os processos matemáticos* (em chinês, *Jiuzhang suanshu* — ver [2], [8]) figura entre os principais textos de matemática da Antiguidade chinesa. Esta obra, que remonta à época da dinastia Han (-206 a 220), foi escrita por volta do princípio da era comum (d.C.) e consiste numa recolha de conhecimentos matemáticos desenvolvidos durante o milénio precedente. O conteúdo matemático dos *Nove capítulos* é apresentado de forma sumária e sem justificações, sob a forma de problemas com respostas e de processos para encontrar essas respostas. Contudo, esta obra, um dos «clássicos» da China antiga, foi ao longo dos séculos objecto de comentários explicando e justificando esses algoritmos. Para o nosso propósito são particularmente interessantes os comentários de Liu Hui (263), que dão uma interpretação geométrica bastante límpida do método proposto nos *Nove capítulos* para a extracção da raiz quadrada.

Uma visão geométrica

Pretendemos agora ilustrar o funcionamento do algoritmo chinês para a raiz quadrada e fornecer uma sua motivação geométrica baseada nos comentários de Liu Hui. Para isso usamos como caso tipo o cálculo de $\sqrt{55\,225}$ que é um dos exemplos numéricos tratados nos *Nove capítulos* (problema 12 do Capítulo 4). O facto de este número ser um quadrado perfeito não retira nada à generalidade do objectivo, o algoritmo que dá, um a um, os algarismos da raiz quadrada, qualquer que seja o seu valor posicional. A discussão que segue podia assim ser facilmente transposta para o caso de uma raiz quadrada não inteira. Esta constatação encontra-se aliás nos comentários de Liu Hui, que fala explicitamente da continuação da extracção da raiz para lá da unidade, "na parte decimal" ([2, p.365]): Liu Hui menciona que os algarismos obtidos sucessivamente são então tomados como numeradores, enquanto que 10, 100, ... intervêm como denominadores. E ele exprime claramente que cada vez que se calculam mais algarismos decimais, mais as fracções correspondentes são "finas", de forma que apesar do quadrado de partida não ter sido completamente esgotado, a parte ("superfície") desprezada torna-se tão pequena que "não vale a pena falar dela" ([2, p. 365]).

Sem surpresa, Liu Hui vê o cálculo de uma raiz quadrada como a procura do lado de uma quadrado dado. Contudo, em vez de proceder a uma decomposição do quadrado "à maneira da Mesopotâmia", faz uma dissecção que se aproxima muito da numeração em base dez. Sublinhemos simplesmente, a propósito da numeração chinesa, que os Chineses utilizavam entre eles um sistema decimal posicional, bastante próximo do nosso: o sistema dos pauzinhos para calcular.

A figura 9, retirada dos comentários de Liu Hui (ver [2, pp. 323 e 801] e [8, p. 207]) serve de suporte aos argumentos geométricos que subentendem o processo dos *Nove capítulos* para a extracção da raiz quadrada. A figura deve ser lida etapa a etapa, enquanto se procura "esgotar" o quadrado de área dada por quadrados de área cada vez maior – Liu Hui utiliza mesmo a cor para ilustrar os seus propósitos, onde nós usamos o sombreado. (Esta figura não está, evidentemente, à escala.)

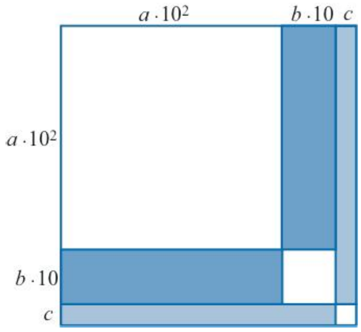

Figura 9

É preciso começar por observar que $\sqrt{55\,225}$ é um número que expresso na forma decimal é constituído por três algarismos: este facto decorre facilmente da observação do número de algarismos das primeiras potências de 10. Em base 10, o número $\sqrt{55\,225}$ é pois da forma abc (ou, se preferirmos $a \times 10^2 + b \times 10 + c$). Calculemos agora, um a um, cada um dos algarismos a, b e c, por ordem. Para tornar mais clara a discussão, reproduzimos a figura 9 em cada etapa do cálculo, destacando os elementos pertinentes a essa etapa. No entanto o raciocínio pode ser efectuado sobre uma só figura 9.

Etapa I: O algarismo das centenas

Procuramos em primeiro lugar o maior valor que o algarismo das centenas, a, pode ter de forma que o quadrado de lado $a \times 10^2$ caiba no quadrado com área 55225, isto é,

$$\left(a \times 10^2\right)^2 \leq 55\,225 \qquad (13)$$

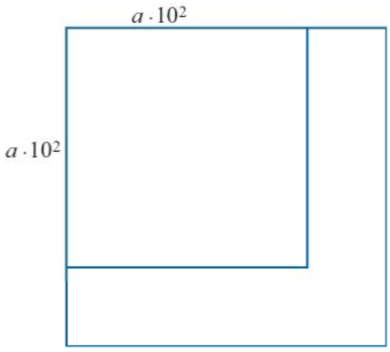

Figura 10

Resulta que $a = 2$. Observemos o gnómon à volta deste quadrado de lado 200; ele tem área igual a $55\,225 - 200^2 = 15225$.

Etapa II: O algarismo das dezenas.

Seguidamente procura-se o maior valor que o algarismo das dezenas, b, pode ter de forma que dois rectângulos de lados 200 e $b \times 10$, mais um quadrado de lado $b \times 10$ caibam no gnómon com área 15225, isto é,

$$2 \times 200 \times b \times 10 + \left(b \times 10\right)^2 \leq 15\,225 \qquad (14)$$

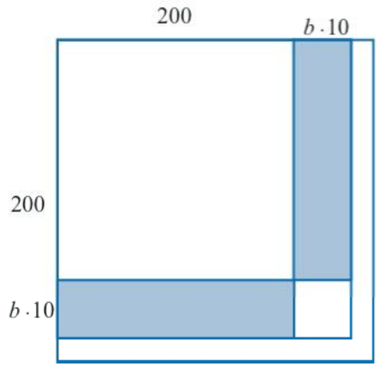

Figura 11

Como $2 \times 200 \times 3 \times 10 + (3 \times 10)^2 = 12\,900$ e $2 \times 200 \times 4 \times 10 + (4 \times 10)^2 = 17\,600$ conclui-se que b = 3. Obtemos então o quadrado de lado 230 rodeado por um gnómon com área $55\,225 - 230^2 = 23\,25$

Etapa III: O algarismo das unidades

Procuramos agora o maior valor que o algarismo das unidades, *c*, pode ter de forma que dois rectângulos com lados 230 e c mais um quadrado de lado c caibam num gnómon com área 2 325, isto é

$$2 \times 230 \times c + c^2 \leq 2\,325 \qquad (15)$$

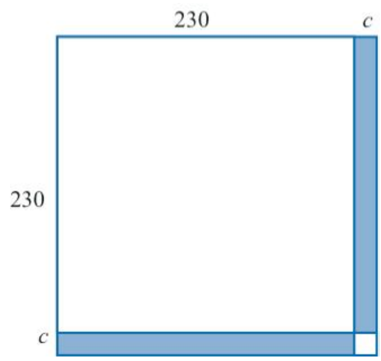

Figura 12

Conclui-se facilmente que $c = 5$ — que verifica a igualdade em (15) — e assim $\sqrt{55225} = 235$.

É de salientar que, contrariamente aos métodos analisados nas secções anteriores, o processo dos *Nove capítulos* fornece um a um os algarismos de uma raiz quadrada, cada etapa de cálculo fornecendo uma nova posição decimal (por ordem decrescente de grandeza). Foi por este processo que, no cálculo de $\sqrt{55\,225}$, se obtiveram sucessivamente os valores 200, 230 e 235. No caso dos algoritmos anteriores, cada etapa permite em geral obter vários algarismos da raiz — não esqueçamos que estes métodos estão todos englobados no algoritmo de Newton-Raphson, que converge quadraticamente.

6.2. Ligação entre o algoritmo chinês e o algoritmo usual

Há apenas algumas décadas, ensinava-se na escola primária um método para calcular a raiz quadrada. Esse algoritmo era evidentemente introduzido como um conjunto de regras para aplicar praticamente às cegas, sem qualquer justificação. Gostaríamos de mostrar aqui que este "truque de cálculo" não é mais do que uma disposição cómoda das manipulações numéricas que se executam usando um processo como o *dos Nove capítulos*. Observemos a propósito que esta obra propõe uma certa disposição em forma de quadro dos números intervenientes neste cálculo — trata-se da representação dos números com o auxílio de "barras de calcular" (ver [2, p. 324] e [8, p. 207]). Mas a forma de juntar os números é diferente da que segue.

Etapa 0': O número de algarismos da raiz quadrada

Começamos por dividir o número do qual se extrai a raiz quadrada em grupos de dois algarismos andando para a esquerda a partir da vírgula decimal. (Se existe uma parte decimal faz-se o mesmo para a parte decimal andando para a direita a partir da vírgula.)

$$\begin{array}{r|l} 5\;\;52\;\;25 & \underline{\qquad\quad} \\ & \end{array}$$

A raiz quadrada de 55 225 é assim composta por três algarismos (na sua parte inteira.)

Etapa I' : O algarismo das centenas

Procuramos o maior algarismo a tal que $a^2 \leq 5$. Tem-se então que $a = 2$, e elevamos ao quadrado: 2 x 2 = 4, que subtraímos de 5, restando 1.

$$\begin{array}{l|l} 5\;\;52\;\;25 & \underline{2\qquad} \\ \underline{4} & 2\times 2 \\ 1 & \end{array}$$

Etapa II' : O algarismo das dezenas

Baixamos o grupo seguinte, 52. Seguidamente cortamos o produto 2 x 2 (que já não serve), e duplicamos o 2 para obter 4.

$$\begin{array}{l|l} 5\;\;\cancel{52}\;\;25 & \underline{2\qquad} \\ \underline{4} & \cancel{2\times 2} \\ 1\;\;52 & 4 \end{array}$$

Procuramos agora o maior algarismo b tal que o número que se escreve na forma "4b" seja tal que multiplicado por b caiba em 152, isto é, tal que $(2\times 20+b)\times b \leq 152$. Encontramos $b = 3$. Calculamos: 43 x 3, que subtraímos a 152, restando 23.

$$\begin{array}{l|l} 5\;\;\cancel{52}\;\;25 & \underline{2\qquad} \\ \underline{4} & \cancel{2\times 2} \\ 1\;\;52 & \\ \underline{1\;\;29} & \\ \;\;\;23 & \end{array}$$

Etapa III' : O algarismo das unidades

Baixamos o grupo seguinte, 25. Seguidamente cortamos o produto 43 x3 e duplicamos 23, obtendo 46.

$$
\begin{array}{rrr|l}
5 & \cancel{52} & \cancel{25} & 23 \\
\underline{4} & & & \cancel{2\times 2} \\
1 & 52 & & \cancel{43\times 3} \\
\underline{1} & \underline{29} & & 46 \\
 & 23 & 25 &
\end{array}
$$

Procuramos agora o maior algarismo c tal que o número que se escreve na forma "46c" seja tal que multiplicado por c caiba em 2 325, isto é, tal que $(2\times 230+c)\times c \leq 2325$. E ncontramos $c=5$. Calculamos: 465 x 5 = 2325 de forma que o resto seja zero. A raiz quadrada está à vista, em cima à direita da grelha de cálculo: $\sqrt{55225}=235$.

$$
\begin{array}{rrr|l}
5 & \cancel{52} & \cancel{25} & 235 \\
\underline{4} & & & \cancel{2\times 2} \\
1 & 52 & & \cancel{43\times 3} \\
\underline{1} & \underline{29} & & 465\times 5 \\
 & 23 & 25 & \\
 & \underline{23} & \underline{25} & \\
 & & 0 &
\end{array}
$$

O "mistério" envolvendo etapas do estilo "*duplica-se o número que aparece na linha de cima, na parte da direita da grelha de cálculo*" desvanece-se completamente se pensarmos na ligação com a decomposição geométrica do quadrado inicial em rectângulos e quadrados de diferentes tamanhos, tal como foi proposto por Liu Hui. Aliás, as várias manipulações efectuadas para a aplicação do algoritmo "algarismo a algarismo" tornam-se mais claras se nos dermos ao trabalho de escrever os zeros necessários para completar todas as posições decimais no decorrer do cálculo. (Podemos aproveitar para alinhar os cálculos intermédios correspondentes às desigualdades (13), (14) e (15) com os produtos que daí resultam.)

$$
\begin{array}{rrr|l}
5 & \cancel{52} & \cancel{25} & 235 \\
\underline{4} & \underline{00} & \underline{00} & \cancel{200\times 200} \\
1 & 52 & 25 & \\
\underline{1} & \underline{29} & 00 & \cancel{430\times 30} \\
 & 23 & 25 & \\
 & \underline{23} & \underline{25} & 465\times 25 \\
 & & 0 &
\end{array}
$$

6.3. Uma visão algébrica

De um ponto de vista algébrico, o algoritmo usual tratado na secção anterior pode ser visto como a utilização repetida da identidade fundamental

$$(u+v)^2 = u^2 + \left(2uv + v^2\right) \tag{16}$$

(pode-se evidentemente fazer a mesma ligação com o processo de Liu Hui). Indicamos sumariamente em seguida como esta identidade intervém nos cálculos em questão.

Etapa I'': O algarismo das centenas

Para encontrar o algarismo das centenas a utiliza-se a desigualdade (13), $\left(a\times 10^2\right)^2 \le 55\,225$, cuja interpretação é a mesma num contexto algébrico.

Etapa II'': O algarismo das dezenas

Considere-se agora o algarismo das dezenas b. Neste caso a identidade fundamental (16) toma a forma

$$(200 + b\times 10)^2 = 200^2 + \left(2\times 200\times b\times 10 + (b\times 10)^2\right)$$

Ora, os dois últimos termos que se encontram do lado direito desta igualdade constituem o membro da esquerda da desigualdade (14) e podem ser escritos na forma $(2 \times 200 + b \times 10) \times b \times 10$. Procura-se então o maior valor de b tal que

$$(2\times 200 + b\times 10)\times b\times 10 \le 15\,225$$

Obtém-se $b = 3$, de forma que a desigualdade anterior toma a forma $430\times 30 = 12\,900 \le 15\,225$, o que corresponde à segunda parte da etapa II'.

Quando expressa em termos gerais, conservando o símbolo a para algarismo das centenas, esta etapa diz respeito à expressão $(2 \times a \times 10^2 + b \times 10) \times b \times 10$, que se vislumbra facilmente nas manipulações da secção 6.2.

Etapa III'': O algarismo das unidades

No caso do algarismo das unidades c, a identidade fundamental (16) toma a forma

$$(230 + c)^2 = 230^2 + \left(2\times 230\times c + c^2\right)$$

Mais uma vez os dois termos à direita da igualdade referem-se a uma desigualdade da secção 6.1, mais precisamente a desigualdade (15). Reescrevendo os seus termos na forma $(2 \times 230 + c) \times c$, volta-se a encontrar o cálculo da última parte da etapa III', da secção 6.2.

No caso a interpretação algébrica desta etapa reporta-se à expressão

$$2\times\left(a\times 10^2 + b\times 10\right)\times c + c^2 = \left(2\times\left(a\times 10^2 + b\times 10\right) + c\right)\times c$$

que intervém nos cálculos da secção 6.2.

7. Alguns caminhos alternativos

O presente texto não pretende minimamente ser exaustivo no que diz respeito ao desenvolvimento ao longo dos tempos das técnicas de extracção da raiz quadrada. Outras contribuições teriam merecido ser apresentadas e limitamo-nos a sublinhar brevemente três delas.

1. Cerca do ano 370 da nossa era, Teão de Alexandria utiliza como suporte geométrico para os seus cálculos a partição canónica do quadrado de lado $a+b$ em dois quadrados e dois rectângulos – reportando-se à proposição II.4 dos *Elementos* de Euclides para essa decomposição. Teão está então a comentar o *Almagesto* de Ptolomeu e pretende explicar como calcular $\sqrt{4500}$ da qual este último deu o valor sem justificação. A figura que acompanha o raciocínio de Teão (ver [14, p. 471]) é, em todos os pontos, idêntica à de Liu Hui (figura 9), e o algoritmo

resultante é muito próximo do algoritmo "algarismo a algarismo" que tratámos anteriormente. Pode-se encontrar a tradução do texto de Teão em [1, pp. 233-234].

2. Este algoritmo "algarismo a algarismo" está presente em numerosas obras de cálculo da Idade Média. O matemático marroquino Ibn al-Banna (século XIII) dá uma explicação deste algoritmo que fornece, com base na numeração posicional, uma descrição do processo a seguir para a extracção de uma raiz quadrada (ver [1, pp. 235-237]).

3. Encontramos na Antiguidade grega um método completamente diferente para calcular $\sqrt{2}$. Assenta na constatação, conhecida dos Pitagóricos, de que o quadrado construído sobre a diagonal de um quadrado dado tem uma área que duplica a do quadrado inicial. No entanto, a irracionalidade da razão entre a diagonal do quadrado e o seu lado teria levado os Pitagóricos a introduzir o processo denominado dos *números laterais e diagonais* para obter valores aproximados desta razão (isto é, em linguagem moderna, do número $\sqrt{2}$). O processo em causa pode ser visto como consistindo em trabalhar com razões sucessivas de racionais, mas tais que o quadrado de um dos membros de uma dada razão difere apenas de uma unidade do dobro do quadrado do outro membro.

Numa obra intitulada *Exposição dos conhecimentos matemáticos úteis para a leitura de Platão* ([15]), o filósofo Teão de Smyrne (século II da nossa era) introduz duas sucessões de números inteiros satisfazendo uma relação deste tipo. Mais precisamente, pondo $c_1 = d_1 = 1$, define duas sucessões $\{c_n\}$ e $\{d_n\}$ através das igualdades

$$c_{n+1} = c_n + d_n \quad \text{e} \quad d_{n+1} = 2c_n + d_n$$

Obtém-se assim $c_2 = 2$, $d_2 = 3$, $c_3 = 5$, $d_3 = 7$, $c_4 = 12$, $d_4 = 17$, etc. Teão menciona que o quadrado de cada número «diagonal» d_n difere de uma unidade do dobro do quadrado do número "lateral" correspondente c_n — estas diferenças tomam alternativamente os valores –1 e +1. Com efeito tem-se a relação

$$d_n^2 = 2c_n^2 + (-1)^n \tag{17}$$

que se verifica facilmente com as notações modernas: uma vez que

$$d_n^2 - 2c_n^2 = (2c_{n-1} + d_{n-1})^2 - 2(c_{n-1} + d_{n-1})^2 = 2c_{n-1}^2 - d_{n-1}^2 = -\left(d_{n-1}^2 - 2c_{n-1}^2\right)$$

cada passagem de uma etapa para outra limita-se a introduzir uma mudança de sinal, o que dá o resultado pretendido quando se observa que $d_1^2 - 2c_1^2 = -1$.

De um ponto de vista geométrico, os números laterais e diagonais podem ser interpretados como segue. Partindo de um losango de lado 1 e tal que uma das suas diagonais também tenha comprimento 1 — tem-se, com efeito, que $c_1 = d_1 = 1$ — isto é, um losango cujos ângulos medem 60° e 120°, cada etapa de iteração consiste então em substituir um losango dado — digamos de lado c_n e tendo d_n como uma das suas diagonais — por um maior (de lado c_{n+1} e de diagonal d_{n+1}) e cuja forma se aproxima cada vez mais de um quadrado. As razões $\frac{d_n}{c_n}$ que tomam sucessivamente os valores $\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{3}, \frac{17}{12}$ etc. que tendem então para $\sqrt{2}$, alternativamente por defeito e por excesso, como mostra aliás a igualdade (17) quando reescrita na forma

$$\frac{d_n^2}{c_n^2} = 2 + \frac{(-1)^n}{c_n^2} \tag{18}$$

Por outras palavras, se c_n é encarado como o lado de um quadrado, então d_n fornece uma aproximação da sua diagonal. Notemos que a aproximação é tanto melhor quanto maiores são c_n e d_n — esta observação decorre imediatamente da igualdade (18), ou pode ser vista como ligada ao facto de a diferença entre d_n^2 e $2c_n^2$ ser sempre igual a 1.

O comentador Proclus (século V) indica que o processo dos números laterais e diagonais, que associa explicitamente aos Pitagóricos, pode ser visto geometricamente como resultando da proposição II.10 dos *Elementos* de Euclides (proposição essa conhecida muito antes da época do próprio Euclides), cuja interpretação algébrica pode ser traduzida pela igualdade

$$(2x+y)^2 - 2(x+y)^2 = 2x^2 - y^2$$

(ver [16, pp. 138-139]).

A igualdade (17) — com n par — é um caso particular da *equação de Pell-Fermat*. Mais geralmente, consideremos a equação $x^2 - my^2 = 1$, em que m é um número inteiro positivo que não é um quadrado perfeito. Esta pode ser reescrita na forma

$$\frac{x^2}{y^2} = m + \frac{1}{y^2},$$

de forma que quando y é "grande", a fracção $\frac{x}{y}$ fornece uma boa aproximação racional para $\sqrt{m}$.

8. Conclusão

Quando está em questão uma raiz quadrada, antes de tudo o que está em causa é a relação

$$p = \sqrt{q} \Leftrightarrow p^2 = q$$

Mais do que uma técnica de cálculo, é ela que traduz a própria essência de uma raiz quadrada. A partir dela podem ser ultimadas técnicas de aproximação numérica. Se, por exemplo, dispomos de uma calculadora com a tecla x (mas sem a tecla $\sqrt{\ }$) a sequência de cálculos seguinte permite procurar as primeiras três casas decimais de $\sqrt{2}$. A ideia presente é de "ensanduichar" 2 entre dois quadrados de forma cada vez mais fina, aumentando uma casa decimal de precisão em cada etapa do cálculo.

$$\begin{gathered} 1^2 < 2 < 2^2 \\ 1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2 \\ 1{,}41^2 < 2 < 1{,}42^2 \\ 1{,}414^2 < 2 < 1{,}415^2 \end{gathered}$$

Apesar da sua simplicidade, este algoritmo "algarismo a algarismo" não é menos fundamental.

Os diferentes métodos apresentados neste texto trazem uma luz diferente sobre a extracção da raiz quadrada. Pretendemos em particular colocar a tónica sobre os métodos que se baseiam numa interpretação geométrica, visão que, segundo nos parece, está muito frequentemente ausente do ensino actual.

Vários destes métodos têm uma eficácia notável – pensemos na convergência quadrática do método de Newton-Raphson, que está por detrás de vários dos algoritmos aqui estudados. Seria provavelmente interessante, quando se trabalha com alunos no final do ensino secundário que participam em programas onde a informática ocupa a parte principal, levá-los a programar Newton-Raphson e permitir-lhes *ver* a rapidez da convergência.

Isto poderia proporcionar a ocasião para reflectir sobre o que se passa "nas entranhas" da calculadora quando se apoia sobre a tecla $\sqrt{\ }$. Newton-Raphson estará provavelmente subjacente... ou qualquer coisa do género! M

Apêndice 1: A desigualdade MH-MG-MA

Pretendemos estabelecer a desigualdade *média harmónica – média geométrica – média aritmética*:

$$\frac{2uv}{u+v} \leq \sqrt{uv} \leq \frac{1}{2}(u+v)$$

onde u e v são dois números reais positivos (ou nulos), sendo a igualdade verificada quando $u = v$. O resultado é evidente se um destes números for nulo.

Demonstração geométrica

Consideremos um semi-círculo de diâmetro $u + v$; a perpendicular CD levantada a partir do ponto C de encontro dos dois segmentos (de comprimentos respectivamente u e v) tem por comprimento $\sqrt{uv}$.E este comprimento é claramente limitado pelo raio OD do semicírculo, cujo comprimentos é igual a $\frac{1}{2}(u+v)$. Por outro lado, verifica-se facilmente que a perpendicular CE baixada sobre OD determina um segmento DE que representa a média harmónica de u e v, isto é, de comprimento $\frac{2uv}{u+v}$. E DE é também limitado por CD. O caso limite $u = v$ corresponde à situação em que, sendo os pontos C e O coincidentes, se tem $DE = CD = OD$.

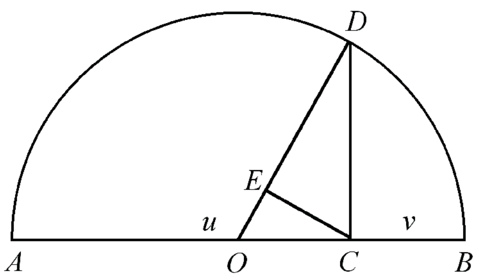

Figura 13

Demonstração algébrica

A ideia é recorrer a uma equação algébrica bem escolhida da qual decorrerá a desigualdade MH-MG-MA. Apresentamos dois exemplos de tais equações que são na realidade variantes uma da outra.

• Observemos que

$$(u+v)^2 = 4uv + (u-v)^2 \tag{19}$$

de forma que

$$(u+v)^2 \geq 4uv \tag{20}$$

Segue-se que, por um lado

$$2\sqrt{uv} \leq u + v$$

e por outro lado

$$\frac{4uv}{(u+v)^2} \leq 1 \text{ e consequentemente } \frac{4u^2v^2}{(u+v)^2} \leq uv$$

com igualdade quando $u = v$ — porque nesse caso $(u - v)^2 = 0$.

• Uma vez que $(x - y)^2 \geq 0$, tem-se que

$$x^2 + y^2 \geq 2xy$$

verificando-se a igualdade quando $x = y$. Os resultados seguem tomando $x^2 = u$ e $y^2 = u$.

Observação

Tanto quanto sei, a desigualdade MH-MG-MA não foi formulada de maneira explícita na literatura da Antiguidade — poderíamos dizer que não estava provavelmente no "espírito" da época. No entanto as ideias encontram-se disseminadas por vários textos. Assim, Heath ([4, II, pp. 185-186]) salienta que tanto a proposição V.25 dos *Elementos* de Euclides como a proposição VI.27 conduzem à desigualdade MG-MA como caso particular. A proposição V.25 interpreta-se como segue, falando de um ponto de vista algébrico: se as quantidades a, b, c e d satisfazem as proporções

$$a \div b = c \div d$$

(sendo a a quantidade maior e d a mais pequena), então

$$a + d > b + c$$

Se $b = c$, então b é a média geométrica de a e d, e a proposição V.25 afirma que esta é limitada pela média aritmética destes dois números. Quanto à proposição VI.27, a desigualdade MG-MA pode ser vista como o resultado de uma discussão sobre áreas de paralelogramos, no contexto daquilo a que se chama habitualmente a «álgebra geométrica».

A figura 13 que acompanha a demonstração geométrica anterior encontra-se tal e qual na secção 11 do Livro III da Colecção Matemática ([13, pp. 50-51]) de Pappus da Alexandria (século IV). Pappus interessa-se então pelo problema da representação num semicírculo das médias aritmética, geométrica e harmónica.

Finalmente observemos que a identidade (19) é conhecida há muito tempo e corresponde à proposição II.5 dos *Elementos* de Euclides que, visto como resultado de álgebra geométrica, pode ser interpretado directamente como

$$\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 = uv + \left(\frac{u-v}{2}\right)^2$$

A identidade (19) é susceptível de uma prova visual tal como as desigualdades (20) e (21) ver figura 14.

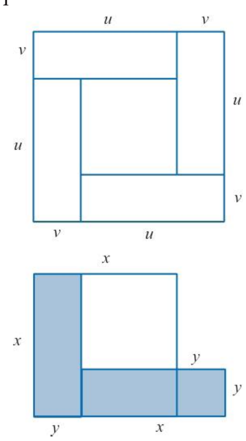

Figura 14

Apêndice 2: A convergência quadrática do método de Newton-Raphson

Revisão: Os desenvolvimentos de Taylor

Dada uma função f — tendo em conta os objectivos da discussão, consideramos uma função de uma variável — , uma ideia base em análise é a de utilizar funções simples, habitualmente polinómios, para aproximar f. Por exemplo, poderemos procurar um polinómio P coincidindo com f e algumas das suas derivadas num ponto dado — não se trata evidentemente da única forma de determinar um polinómio aproximante, mas este processo é de grande importância, tanto do ponto de vista histórico como prático.

Verifica-se sem grande dificuldade (consulte o seu curso de cálculo preferido) que se f é uma função possuindo derivada de ordem n num ponto a, existe um único polinómio P de grau

$$P(a) = f(a), \quad P'(a) = f'(a), \quad P''(a) = f''(a), \quad \ldots, \quad P^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

onde $P^{(j)}$ e $f^{(j)}$ designam a j-ésima derivada de P e de f, respectivamente. Escrevendo o polinómio na forma geral

$$P(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n$$

cada coeficiente a_j satisfaz então a igualdade

$$a_j = \frac{f^{(j)}(a)}{j!}$$

Obtemos assim o *polinómio de Taylor de grau n no ponto a* para a função f:

$$P_{n,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Consequentemente a função f pode ser representada sob a forma de um desenvolvimento de Taylor,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + E_{n,a}(x)$$

em que o último termo dá o erro que se introduz na aproximação de f pelo polinómio $P_{n,a}$.[6]

Aplicação ao método de Newton-Raphson[7]

Utilizamos agora a noção de desenvolvimentos de Taylor para ajuizar da eficácia do método de Newton-Raphson na procura dos zeros de uma função.

Seja então f uma função possuindo, num certo intervalo, um zero $\bar{x}$ (tem-se então por hipótese $f(\bar{x}) = 0$), e consideremos a função auxiliar

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

exprimindo o processo iterativo de cálculo das raízes da equação $f(x) = 0$) pelo método de Newton-Raphson. Efectuando o desenvolvimento de Taylor de grau 2 de g numa vizinhança do ponto $\bar{x}$, obtém-se[8]

[6] Por exemplo, se supusermos que a derivada $f^{(n+1)}$ existe, a versão dita de *Lagrange* do erro de aproximação é da forma
$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, com c entre a e x.

[7] Agradeço ao meu colega Jean-Jacques Gervais o ter-me chamado à atenção para esta demonstração da convergência quadrática do método de Newton-Raphson.

[8] Necessitamos que a função g seja duas vezes derivável no intervalo em causa, o que arrasta condições análogas para f. No caso que nos interessa, o cálculo da raiz quadrada $\sqrt{k}$ a função f é da forma $f(x) = x^2 - k$, estas condições não levantam evidentemente quaisquer problemas.

$$g(x) = g(\bar{x}) + g'(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{g''(\bar{x})}{2!}(x - \bar{x})^2 + E_{2,\bar{x}}(x)$$

Uma vez que, por hipótese, se tem $f(\bar{x}) = 0$, então $g(\bar{x}) = \bar{x}$ (supomos neste caso que $f'(\bar{x}) \neq 0$, o que equivale a eliminar as raízes duplas da equação $f(x) = 0$. Por outras palavras, $\bar{x}$ é um *ponto fixo* da função g. Além disso verifica-se sem grande dificuldade que $g'(\bar{x}) = 0$. Com efeito, um simples exercício de derivação conduz a

$$g'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2},$$

de forma que

$$g'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - 0}{[f'(x)]^2} = 0.$$

Resulta então que

$$g(x) = \bar{x} + \frac{g''(\bar{x})}{2!}(x - \bar{x})^2 + E_{2,\bar{x}}(x),$$

isto é

$$g(x) - \bar{x} \approx \frac{g''(\bar{x})}{2!}(x - \bar{x})^2. \ (*)$$

Pondo $x = x_i$, a i-ésima iterada na aplicação do método de Newton-Raphson, tem-se que $g(xi) = x_{i+1}$, de forma que a expressão (*) toma a forma

$$x_{i+1} - x_i \approx \frac{g''(\bar{x})}{2!}(x_i - \bar{x})^2. \ (**)$$

Ora as expressões $x_{i+1} - \bar{x}$ e $x_i - \bar{x}$ (que designamos respectivamente por e_{i+1} e e_i) representam os erros de aproximação nas $(i+1)$ - ésima e i - ésima etapas. Além disso, o factor $\frac{g''(\bar{x})}{2!}$ é constante. A expressão (**) é pois da forma

$$e_{i+1} \approx \text{cte} \times e_i^2$$

o que exprime que em cada iteração o erro da aproximação varia com uma potência 2. Diz-se então que o processo de Newton-Raphson é de *convergência quadrática*, ou de *convergência de ordem* 2. Isto significa grosso modo que o número de casas decimais de precisão duplica em cada etapa de iteração. Assim, se o erro e_i é da ordem de 10^{-4}, e_{i+1} é da ordem de 10^{-8}. Newton-Raphson é pois um método potencialmente eficaz!

Referências

[1] **Jean-Claude Chabert** *et al* (1994). *Histoire d'algorithmes: Du caillou à la puce*. Belin

[2] **Karine Chemla e Guo Shuchun** (2004). *Les Neuf chapitres: Le Classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaries*. Dunod

[3] **René Descartes** (1637/1894). *La Geométrie*. Versão em francês moderno em: Auguste Comte, *La géométrie analytique*. Paris, Louis Bahl

[4] **Euclides** (1926/1956). *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. (tradução e comentários de Thomas Heath.) (2ª edição) Tomos I, II, e III. Dover.

[5] **Thomas Heath** (1921/1981). *A History of Greek Mathematics*. *Volume I: From Thales to Euclid. Volume II: From Aristarchus to Diophantus.* Dover

[6] **Herão de Alexandria** (1903/1976). "Les Métriques". *Heronis Alexandrini Opera quæ sunt omnia, vol III* (texto grego e tradução alemã por Hermann Schöne. B.G. Teubner)

[7] **George Gheverghese Joseph (1992)**. *The Crest of the Peacock: Non-European Roots of Mathematics*. Penguin Books

[8] **Shen Kangshen, John N. Crossley e Anthony W.-C. Lun** (1999). *The Nine Chapters of the Mathematical Art: Companion and Commentary*. Oxford University Press

[9] **Victor J. Katz** (1998). *A History of Mathematics: An Introduction*. (2ª edição) Addison-Wesley

[10] **Richard Mankiewicz** (2001). *L'histoire des mathématiques*. Seuil

[11] **Otto Neugebauer** (1957/1969). *The Exact Sciences in Antiquity*. (2ª edição) Dover

[12] **Otto Neugebauer e Abraham J. Sachs** (1945). *Mathematical Cuneiform Texts*. (American Oriental Series, vol. 29) American Oriental Society

[13] **Pappus de Alexandria** (1933). *La Collection mathématique.* Tomo I. (Tradução e comentários por Paul Ver Eecke.) Desclée De Brouwer

[14] **Teão de Alexandria** (1936). "Commentaires sur les livres 1 et 2 de l'Almageste" *A. Rome, dir., Commentaires de Pappus et de Théon d'Alexandrie sur l'Almageste*. Tomo II. Biblioteca Apostolica Vaticana

[15] **Teão de Esmirna** (1892). *Exposition de connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon*. (Tradução e comentários por J. Dupuis) Hachette

[16] **Ivor Thomas** (1939/2002). *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics*. Volume I: From Thales to Euclid. Harvard University Press