por **Rui Feiteira** [Escola Secundária Poeta António Aleixo, Portimão]
Marília Pires [Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade do Algarve]

O Planeamento de Projectos

Nos nossos dias, com o anunciado advento das grandes e pequenas obras públicas, a gestão e o planeamento desses projectos ganham especial importância. Neste artigo pretendemos mostrar o papel que a matemática pode desempenhar nesse planeamento, ajudando assim a poupar o dinheiro dos contribuintes.

Introdução

Todos já se depararam com notícias sobre o atraso de grandes ou pequenas obras públicas. Foi assim com o Centro Cultural de Belém, com a Expo'98, com os estádios do Europeu de Futebol de 2004, com o túnel do Rossio, com a ponte de Viana do Castelo… Nalguns casos os atrasos só causam transtornos às populações, como foi o caso da ponte de Viana do Castelo, mas noutros há prazos a cumprir, ligados aos eventos que se irão desenrolar na obra que está por concluir. Para minimizar os atrasos e não comprometer a realização dos eventos, normalmente tem de ser feito um enorme esforço financeiro. Se nalgumas vezes estes atrasos se devem a acidentes não previsíveis, noutras tudo parece ficar a dever-se à falta de planeamento prévio e/ou ao rigor na observação dos prazos de construção.

Uma das ferramentas que têm sido mais utilizadas internacionalmente para apoio ao planeamento de grandes ou pequenas obras é o algoritmo conhecido por PERT-CPM.

Neste artigo, através de pequenos exemplos, pretendemos mostrar o funcionamento e a importância deste algoritmo e o motivo que levou à sua intensa utilização como uma ferramenta de apoio à decisão, nos últimos quarenta anos.

O algoritmo PERT/CPM

O algoritmo de PERT (iniciais de **P**rogram **E**valuation and **R**eview **T**echnique) foi criado nos Estados Unidos como resposta à solicitação governamental de desenvolver um míssil balístico que pudesse competir com os soviéticos, o mais rapidamente possível. Nasceu assim o programa Polaris, em que a rapidez, o planeamento e o rigor eram fundamentais. Era necessário ter uma ideia precisa das fases do programa que podiam ser desenvolvidas em paralelo e das que tinham de ser desenvolvidas sequencialmente, assim como também era necessário saber com precisão quais as fases a que se deveria afectar o maior número de meios humanos e materiais. Uma equipa de cientistas criou o algoritmo de PERT a fim de melhor projectar a execução das fases do programa. Este revelou-se tão eficiente que a sua utilização permitiu diminuir o tempo global de realização do projecto, dos sete anos inicialmente previstos para apenas quatro. Dados os bons resultados obtidos, o que começou por ser um segredo militar altamente guardado depressa se expandiu, com enorme sucesso, ao planeamento industrial.

Paralelamente ao algoritmo PERT, uma outra equipa independente desenvolveu o algoritmo CPM (iniciais de **C**ritical **P**ath **M**ethod). Este algoritmo destina-se fundamentalmente a estudar a data em que projectos de grandes dimensões podem ser terminados, permitindo calcular a duração do projecto, as tarefas críticas, identificar as folgas nas actividades, e está na base de algoritmos para controlar tempos e recursos. A diferença fundamental entre as duas abordagens consiste em que o CPM lida com tempos bem determinados e o PERT com tempos não determinísticos, de acordo com uma função de distribuição de probabilidade conhecida, ou não. Informalmente, os dois métodos passaram a ser usados em conjunto e conduziram a uma única técnica, que se passou a designar por PERT-CPM[1]. A utilidade desta ferramenta no planeamento de grandes projectos que sejam constituídos por muitas actividades, que devam ser executadas numa determinada ordem, com tempos de duração independentes uns dos outros, sendo as precedências das actividades perfeitamente conhecidas, é inquestionável.

A análise de um projecto deverá começar pela identificação das actividades que o compõem e das relações de precedência existentes entre elas. Neste ponto devemos referir que existem modelos distintos de representação de um projecto a partir de um grafo – nuns as actividades são associadas aos arcos (como fazemos neste trabalho) e noutros são associadas aos vértices. Num modelo em que as actividades estão associadas aos arcos, representa-se um projecto por um grafo orientado ponderado em que cada tarefa corresponde a um arco. Cada etapa do projecto é representada por um vértice. O início do projecto é representado pelo vértice inicial e a sua conclusão é representada por um vértice final. Como o nome indica, o vértice inicial corresponde à etapa onde tudo começa e, por isso, não chega nenhum arco ao vértice inicial, enquanto o vértice final corresponde à etapa onde tudo está concluído e, assim, não pode sair nenhum arco do vértice final. De referir que não pode haver mais nenhum vértice no grafo com estas características. O peso de cada arco corresponde à duração estimada da tarefa que lhe diz respeito. O grafo deve ser desenhado de modo a traduzir fielmente as relações de precedência das tarefas.

Vejamos um pequeno exemplo, talvez pouco real, de um projecto. Uma revista dispõe de 16 horas para editar um número especial sobre um grande acontecimento social. A tabela seguinte mostra quais as tarefas a desenvolver, as durações esperadas e as suas interdependências (adaptado de Feiteira, 2007).

Tarefas	Duração (horas)	Tarefa Antecedente
A. Comprar rolos fotográficos	1	-
B. Preparar câmaras fotográficas	1	A
C. Fotografar a quinta	3	B
D. Fotografar a entrada dos convidados	2	C
E. Fotografar o beberete	1	B
F. Revelar os filmes	2	D, E
G. Preparar a edição da revista	5	D, E
H. Imprimir a revista	3	G, F

Quadro 1

Comecemos por traduzir a tabela anterior por um grafo orientado em que cada tarefa corresponde a um arco e cada vértice a uma etapa do projecto. O vértice 1 corresponde ao início e o vértice 8 ao fim do projecto.

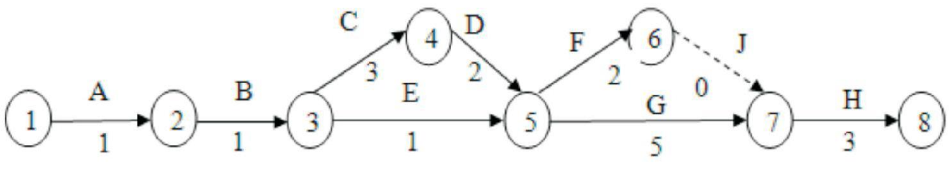

Figura 1

[1]Para sermos mais precisos, o CPM é utilizado quando os tempos são determinísticos sem estar conjugado com o PERT. Este último utiliza como modelo de simplificação o CPM aplicado a tempos médios.

Esta representação gráfica tem a grande vantagem de tornar claras as relações de dependência entre as actividades a realizar. Uma das regras para a construção do grafo é não desenhar arcos paralelos, isto é, arcos com o mesmo vértice inicial e o mesmo vértice final. Esta foi a razão que nos levou a incluir a actividade fictícia J com duração nula, a fim de cumprir essa regra e a precedência das actividades G e F sobre a actividade H. A razão desta regra prende-se com a ambiguidade que resultaria na determinação do caminho crítico, como veremos mais adiante. Veremos também, à frente, outras situações em que é necessária a introdução de arcos correspondentes a actividades fictícias. Da análise do grafo podemos perceber melhor como se desenrolam as tarefas necessárias para completar o projecto. Por exemplo, podemos concluir que: as actividades C e E dependem de B; a actividade F só se pode iniciar depois de D e E estarem concluídas; as actividades C e E podem eventualmente ser realizadas simultaneamente, assim como as D e E e as F e G.

A duração do projecto obtém-se determinando o caminho mais longo entre os vértices que representam o seu início e o seu fim. A esse caminho chama-se *caminho crítico* e às actividades correspondentes aos arcos que constituem o *caminho crítico* chamam-se *tarefas* (ou *actividades) críticas*. Estas são as tarefas para as quais um eventual atraso de realização representaria um aumento correspondente da duração global do projecto. Uma primeira tentativa de determinação do *caminho crítico* pode passar pela determinação do comprimento de todos os caminhos entre o vértice 1 e o vértice 8 no grafo orientado da figura 1. Neste grafo existem quatro caminhos distintos entre o vértice inicial e o vértice final, que identificamos no quadro 2, com os seus respectivos comprimentos.

Caminho	Comprimento
A-B-C-D-F-J-H	1+1+3+2+2+0+3=12
A-B-C-D-G-H	1+1+3+2+5+3=15
A-B-E-G-H	1+1+1+5+3=11
A-B-E-F-J-H	1+1+1+2+0+3=8

Quadro 2

O caminho mais longo corresponde ao *caminho crítico*. Assim, o *caminho crítico* é Início-A-B-C-D-G-H-Fim e tem a duração de 15 horas. Logo, a revista consegue ter a edição especial preparada antes das 16 horas. A figura 2 mostra, a vermelho, o *caminho crítico*.

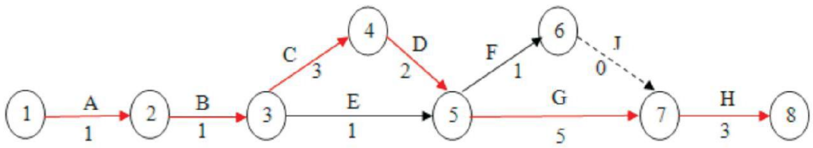

Figura 2

Em grandes projectos, não seria exequível analisar explicitamente todos os caminhos em tempo útil. Usa-se então um algoritmo análogo ao de Dijkstra, mas para determinar o caminho mais longo. Para determinar o caminho crítico, este algoritmo rotula cada vértice, com o tempo mais cedo em que as tarefas precedentes ficam concluídas, ou seja, com o tempo correspondente ao completar da etapa a que o vértice diz respeito. O valor de cada rótulo de um vértice, a vermelho na figura 3, é o máximo entre os valores correspondentes à soma da duração de cada tarefa que termine nesse vértice, com o rótulo do vértice onde cada uma dessas tarefas se iniciou.

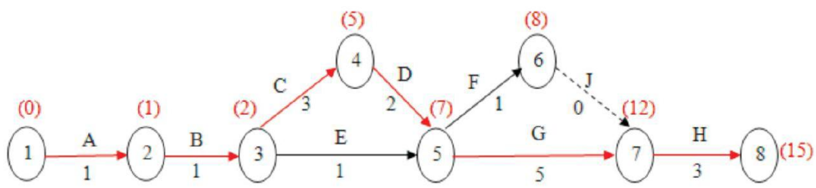

Figura 3

Vamos exemplificar com o cálculo do rótulo do vértice 5. Neste vértice terminam duas tarefas: E e D. A tarefa D começa no vértice 4, que tem rótulo 5, e dura 2 unidades de tempo. A soma correspondente à tarefa D é, pois, 7. A tarefa E começa no vértice 3, que tem rótulo 2, e duração 1 unidade de tempo. A soma correspondente à tarefa E é, pois, 3. Repare-se que estas somas representam o tempo mais cedo em que a tarefa fica concluída. Como a etapa 5 só fica concluída quando todas as tarefas que nela terminam estão realizadas, então temos de atribuir ao vértice 5 o rótulo 7. Para os outros vértices, procede-se de forma análoga. Formalmente, o tempo mais cedo (TE)[2], da etapa *j*, é dado em função dos tempos mais cedo dos nós precedentes através de

$$TE_j = \max_i \{TE_i + d_{ij}\} \qquad (1)$$

em que d_{ij} representa a duração duma tarefa que se inicia no vértice *i* e termina no vértice *j*, sendo este máximo calculado para todas as tarefas que terminam em *j*. Aplicando (1) à etapa 5, teríamos:

$$TE_5 = \max_i \{TE_3 + d_E, TE_4 + d_D\} = \{2+1, 5+2\} = 7$$

Obviamente, o tempo mais cedo do vértice final representa o tempo mínimo para a duração de todo o projecto. A partir dos rótulos dos vértices e do tempo de duração das tarefas, é agora fácil identificar o *caminho crítico*. Com efeito, se $d_{ij} = TE_j - TE_i$, então a tarefa que se inicia no vértice *i* e termina no vértice *j* é crítica.

Este algoritmo utiliza ainda outra função de tempo: o tempo mais tarde. Esta função determina as datas mais tardias para o início de cada etapa que não afectem a data de conclusão do projecto, ou seja, que não interfiram na duração do *caminho crítico*. No exemplo apresentado, de muito pequena dimensão, não se chega a perceber muito bem o interesse desta função, mas em grandes projectos assume grande importância, pois é através dela, como veremos, que se podem calcular as folgas para as actividades não críticas.

Para calcular o **tempo mais tarde** (TL)[3] de uma actividade, começamos no vértice final com o tempo igual à duração do projecto: $TL_7 = TE_7 = 15$. Depois virá $TL_6 = TL_7 - 3 = 12$. Geralmente, temos

$$TL_i = \min_j \{TL_j + d_{ij}\} \qquad (2)$$

sendo o mínimo calculado para todas as tarefas que se iniciam no vértice *i*. Aplicando (2) à etapa 5, teríamos:

$$TL_5 = \{TL_6 - d_F, TL_7 - d_G\} = \{12-2, 12-5\} = 7$$

Finalmente, costuma representar-se o grafo orientado que sumariza toda esta informação, colocando sobre cada vértice um rectângulo com os seus tempos mais cedo (à esquerda) e mais tarde (à direita).

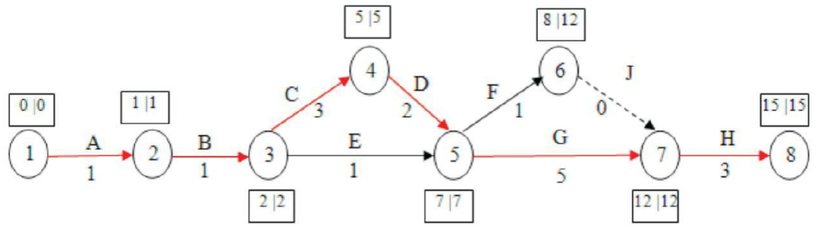

Figura 4

Neste exemplo, que é bastante simples e tem poucas actividades, os tempos mais cedo e mais tarde têm o mesmo valor em quase todos os vértices. Mesmo assim, podemos analisar, por exemplo, a tarefa E. O seu início mais cedo é no tempo 2 e o seu fim mais tarde é no tempo 7. Como a tarefa só tem a duração de 1 unidade de tempo e podemos gastar 5 unidades de tempo na sua execução, isto significa que a tarefa tem 4 unidades de

[2] TE são as iniciais de Time Earlier.
[3] TL são as iniciais de Time Later.

tempo de folga, sem comprometer a duração do projecto. Uma análise semelhante pode ser feita para a tarefa F, que também tem 4 unidades de tempo de folga. Em geral, a utilização das folgas não pode ser cumulativa, isto é, se se usar alguma folga numa actividade não crítica, isso irá afectar a folga das actividades não críticas seguintes. É claro que as actividades críticas não podem sofrer qualquer atraso, pois iria irremediavelmente comprometer o tempo total de duração do projecto.

Vejamos um outro exemplo em que a evidência da utilidade destas duas funções é mais notória e em que se percebe a necessidade de introduzir actividades fictícias para conseguir desenhar o grafo com todas as precedências respeitadas.

Tarefas	A	B	C	D	E	F	G
Duração	10	7	2	2	2	4	5
Tarefa Antecedente	—	—	—	A	A	B	C
Tarefas	H	I	J	K	L	M	N
Duração	3	3	2	3	2	1	1
Tarefa Antecedente	C	G	G	D, E	E, F, I	K, L	E, F, I

Quadro 3

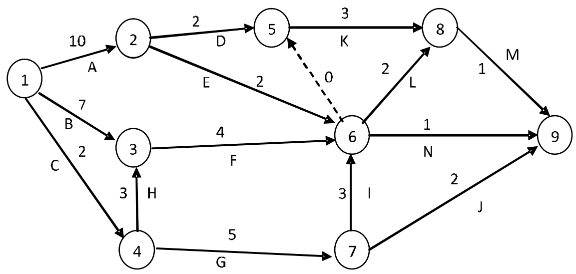

Figura 5

Calculando o tempo mais cedo e o tempo mais tarde de cada vértice, obtemos os valores mostrados na figura 6. Unindo os vértices em que os dois valores dentro dos quadrados são iguais, pelo caminho de maior comprimento, obtém-se o *caminho crítico*, sendo as actividades críticas as que correspondem aos arcos que constituem o caminho e que na figura estão representadas por arcos de linha mais espessa.

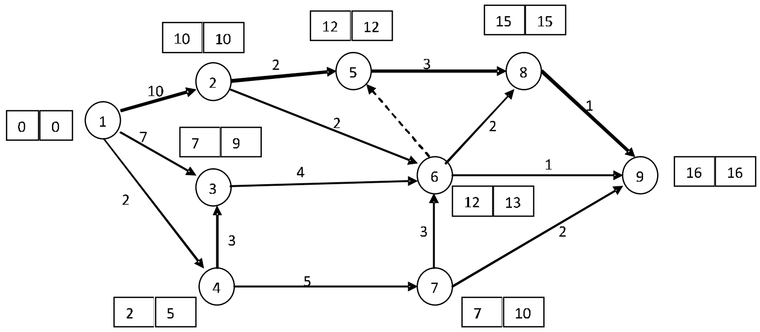

Figura 6

Todas as outras actividades, que não são críticas, têm alguma folga. Por exemplo, a actividade (1,3) tem duração igual a 7 unidades e inicia-se no instante 0. Mas, como o tempo mais tarde da etapa 3 é 9, esta actividade não necessita de ser concluída antes do instante 9. Temos assim 2 unidades de tempo de folga para esta tarefa. Claro que se usarmos toda a folga nesta tarefa, a tarefa seguinte, (3, 6), deixa de ter qualquer folga.

Quase tão importante como a determinação das actividades críticas é a gestão das folgas das actividades não críticas. No exemplo apresentado, tratava-se de perceber o que é melhor do ponto de vista económico: usar as duas unidades de folga na tarefa (1, 3) ou usar uma unidade nessa tarefa e outra na tarefa (3, 6) ou ambas na actividade (3, 6).

A incerteza da duração de um projecto

Na vida real nem sempre é muito fácil determinar exactamente o tempo de duração de uma tarefa. Por exemplo, se estivermos a pensar num projecto de decoração (tipo *Querido, Mudei a Casa*) e tivermos atribuído 5 horas para a pintura das paredes, 2 horas para tempo de secagem e 1 hora para pendurar os quadros e, de repente, começar a chover, o tempo de secagem pode passar de 2 para 4 horas. Ou pode estar um dia de sol abrasador e a secagem não precisar de mais de 30 minutos.

Foi a pensar em situações imponderáveis que foi desenvolvido um modelo que tem em conta a incerteza associada às durações das actividades. No caso de se desconhecer a distribuição de probabilidade associada à duração das tarefas, utiliza-se a distribuição Beta, baseada em três estimativas para os tempos das actividades, para descrever a duração das mesmas:

p – estimativa pessimista – estimativa mais pessimista para o tempo necessário à concretização do projecto;

o – estimativa optimista – estimativa mais optimista para o tempo necessário à concretização do projecto;

m – estimativa provável – corresponde à estimativa de tempo mais provável para a concretização do projecto.

Os valores desta distribuição estão inteiramente contidos no intervalo $]\mu\text{-}3\sigma, \mu\text{+}3\sigma[$, onde μ e σ são respectivamente a média e o desvio-padrão da distribuição. Nestas condições, μ e σ são dados por:

$$\mu = \frac{o + 4m + p}{6} \qquad (3)$$

$$\sigma^2 = \frac{(p - o)^2}{36} \qquad (4)$$

Suponhamos que para o nosso primeiro exemplo, o quadro 4 apresenta os valores para a estimativa optimista (o), a pessimista (p) e a mais provável (m), assim como a respectiva média (μ) e o desvio padrão (σ) [determinados de acordo com (3) e (4), com duas casas decimais].

Tarefas	o	p	m	μ	σ^2
A	0.5	1.5	1	1.00	0.03
B	0.5	1.5	1	1.00	0.03
C	3	4	3	3.00	0.11
D	0.8	2.6	2	1.90	0.09
E	0.7	1.2	1	0.98	0.01
F	1	2.5	2	1.92	0.06
G	4	7	5	5.17	0.25
H	2	3.5	3	2.92	0.06

Quadro 4

Podemos agora, de acordo com o quadro 2, construir o pior cenário para cada um dos caminhos antes descritos.

Caminho	Comprimento
A-B-C-D-F-J-H	1.5+1.5+4+2.6+2.5+0+3.5=15.6
A-B-C-D-G-H	1.5+1.5+4+2.6+7+3.5=20.1
A-B-E-F-J-H	1.5+1.5+1.2+2.5+0+3.5=10.2
A-B-E-G-H	1.5+1.5+1.2+7+3.5=14.7

Quadro 5

O caminho mais longo, utilizando as estimativas pessimistas, é novamente Início-A-B-C-D-G-H-Fim com a duração de 20.1 horas, ou seja, aproximadamente 1 dia e cerca de 4 horas superior ao limite de tempo disponível para pôr a revista na rua. Em princípio, este é um limite superior para a duração do projecto e é de esperar que a probabilidade de este valor ser atingido seja muito pequena.

A duração total do projecto dada pela soma das durações das actividades críticas, se designarmos por

$$D_T = \sum_{i \in C} D_i$$

(em que C é o conjunto das actividades críticas).

Como cada uma das durações é aleatória, D_T, é também uma variável aleatória com média dada por

$$\mu_T = \sum_{i \in C} \mu_i \tag{5}$$

em que μ_i representa a duração média da actividade *i*. Admitindo a independência estatística entre as durações das actividades, a variância da duração será dada por

$$\sigma^2_T = \sum_{i \in C} \sigma^2_i \tag{6}$$

em que σ_i^2 representa a variância da actividade *i*. A determinação rigorosa da distribuição de probabilidade para a duração do caminho crítico é impraticável na maior parte dos casos devido à sua complexidade. Para simplificar a determinação da duração total do projecto, o PERT recorre ao Teorema do Limite Central, que afirma que a soma de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas pode ser aproximada por uma distribuição normal, desde que o número de parcelas seja suficientemente grande. O número de actividades do nosso exemplo não é elevado, mas mesmo assim vamos aplicar este resultado. Nesta fase da análise, o algoritmo PERT introduz uma hipótese simplificativa: o tempo de realização do projecto é controlado pela duração do *caminho crítico* médio, que consiste no caminho determinado para valores médios das durações das actividades (Tavares *et al,* 1996). Sendo assim, para analisar a rede temos de analisar o *caminho crítico* utilizando os valores médios. Obviamente, esta simplificação poderá fazer com que a nossa análise se afaste da realidade, mas, apesar de tudo, pode fornecer-nos uma boa estimativa.

Calculemos agora, para o nosso exemplo, a duração média e a respectiva variância. Por (5) temos que: μ_T=1+1+3+1.9+5.17+2.92=14.99 e por (6) σ^2_T=0.03+0.03+0.11+0.09+0.25+0.06=0.57. Assumindo que a duração do projecto pode ser descrita por uma distribuição normal, podemos calcular a probabilidade de o projecto terminar antes das *d* unidades de tempo. Suponhamos que pretendemos saber qual é a probabilidade de se concluir o projecto num período entre 14 e 16 horas. Seja X o número de horas necessárias para que o projecto fique concluído. Então X segue uma distribuição normal com média 14.99 horas e desvio padrão $\sqrt{0.57}$; 0.75 horas, ou seja, X : $N(14.99, 0.75)$. Estamos interessados em calcular

$$P(14 \leq X \leq 16) = P(X \leq 16) - P(X \leq 14)$$

Standartizando, obtemos

$$P(z \leq \frac{16 - 14.99}{0.75}) - P(\frac{14 - 14.99}{0.75}) = \phi(1.34) - 1 + \phi(1.74).$$

Utilizando uma tabela da distribuição normal reduzida, verificamos que para um argumento igual a 1.74, a probabilidade é de 0.9066 e para um argumento de 1.34 a probabilidade é 0.9099. Logo, temos que

$$\phi(1.34)-1+\phi(1.74)=0.8165$$

Poderíamos ainda tentar calcular qual o prazo w que não é ultrapassado com, por exemplo, 95% de probabilidade.

$$P(X \leq W) = 0.95 \Leftrightarrow P(z \leq \frac{W - 14.99}{0.75}) = 0.95.$$

O valor de 95% é obtido, aproximadamente, em 1.645. Temos então que

$$\frac{W - 14.99}{0.75} = 1.645 \Leftrightarrow W \approx 16.$$

Segundo as estimativas do quadro 4, o projecto deve estar finalizado, com 95% de probabilidade, num máximo de aproximadamente 16 horas, conforme tinha sido requerido.

Considerações finais

Este algoritmo utiliza simultaneamente duas ferramentas que os alunos de Matemática Aplicada às Ciências Sociais estudam: teoria de grafos e distribuição normal (que pode ser estudada nos modelos de probabilidade). Vemos assim um modo de conjugar dois temas que, normalmente, são ensinados de forma estanque. Neste texto tratámos um exemplo de pequena dimensão, como têm de ser os exemplos tratados na aula, e, por isso, necessariamente pouco real. Devido à sua pequena dimensão, assumimos como verdadeira uma consequência do teorema do limite central que é apenas válida para um maior número de actividades. Aceitámos como válida esta hipótese para mostrar o poder desta conjunção entre grafos e probabilidade. Na aula, com ajuda da calculadora gráfica, podemos facilmente ultrapassar o constrangimento do cálculo da probabilidade pedida.

Pensamos que este é também um bom exemplo para trabalhar com os alunos de Matemática A do 12.º ano como uma aplicação da distribuição normal, mesmo sem formalizar o conceito de grafo. Na realidade, a utilização que se faz dos grafos neste problema é bastante intuitiva e está ao alcance de qualquer aluno, mesmo que não tenha estudado nenhum capítulo a eles dedicado. A utilização deste algoritmo põe em evidência a importância que alguns métodos matemáticos podem desempenhar no apoio às decisões das empresas. M

Bibliografia

Crisler, N., Fisher, P., Froelich, G., (1994). *Discrete Mathematics Through Applications*, Nova Iorque, W. H. Freeman and Company.

Departamento do Ensino Secundário, (2001). *Programa de Matemática Aplicada às Ciências Sociais*, Lisboa, Ministério da Educação.

Tavares, L., Oliveira, R., Themido, I., Correia, F., (1996). *Investigação Operacional*, Lisboa, McGraw-Hill.

Feiteira, R., (2007). *Grafos para Todos – Sobre o desenvolvimento da Teoria de Grafos no 3.º Ciclo do Ensino Básico*. (Tese de Mestrado, Universidade do Algarve), Lisboa, APM.