O que é um Ponto de Inflexão?

Suzana Metello de Nápoles [1]
Projecto Matemática em Acção (CMAF-UL)

As orientações metodológicas dos programas do ensino secundário actualmente em vigor, ao pretenderem dar um papel preponderante à denominada "investigação" feita pelo aluno com base em situações muito particulares e que conduzem em muitos casos a falsas conjecturas, não podem excluir, muito pelo contrário, obrigam a que, em devido tempo, os conceitos e a compreensão da forma como eles se interligam sejam apresentados como definições e resultados formulados de forma rigorosa e inequívoca, ultrapassando as noções intuitivas e a sua descrição em linguagem corrente.

A formulação precisa dos conceitos é essencial ao desenvolvimento de um raciocínio matemático, por mais elementar que ele seja. Usar simultaneamente diferentes formulações de um mesmo conceito pode dar origem a incoerências que nem sempre são evidentes. O conceito de *ponto de inflexão* constitui um exemplo da necessidade de clarificação da definição adoptada.

Sentido da concavidade

Matematicamente, a designação *inflexão* está usualmente associada a uma mudança do sentido da concavidade do gráfico de uma função.

Assim, a primeira necessidade que surge para formular o conceito de ponto de inflexão do gráfico de uma função é precisar o que se entende por sentido da concavidade do gráfico.

A ideia de sentido da concavidade do gráfico de uma função é geometricamente intuitiva.

Etimologicamente, a palavra concavidade está associada a cavidade, à forma "cavada" ou "escavada" ou "côncava" de um objecto. A utilização matemática do termo concavidade respeita o seu significado etimológico.

Quando se afirma, por exemplo, que a concavidade do gráfico da parábola $x^2=y$ está voltada para cima, está-se a dizer que o conjunto de pontos do plano $\left\{(x,y)\in I\!R^2 : y\leq x^2\right\}$ é côncavo (não convexo), isto é que o conjunto $\left\{(x,y)\in I\!R^2 : y\geq x^2\right\}$ é convexo.

[1] Os comentários e sugestões da Dra. Manuela Ferreira, fruto do seu espírito de rigor aliado à sua experiência como docente universitária e pré-universitária, foram determinantes para a redacção deste artigo.

Genericamente:

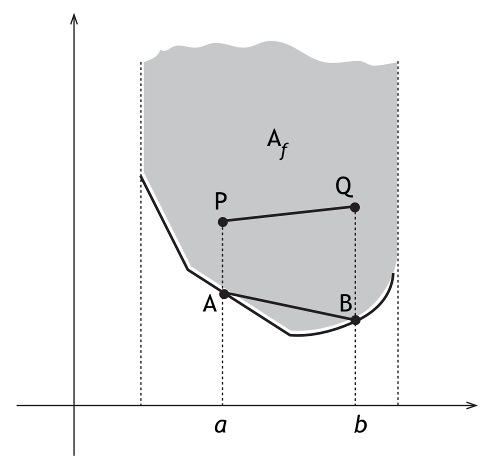
Definição 1.

O gráfico de uma função f tem a concavidade voltada para cima num intervalo aberto I de IR se o conjunto $A_f = \left\{ (x,y) \in IR^2 : x \in I,\ y \geq f(x) \right\}$ é convexo, isto é, se dados quaisquer dois pontos em A_f, o segmento de recta que os une está totalmente contido em A_f.
O gráfico de uma função f tem a concavidade voltada para baixo num intervalo aberto I de IR se o gráfico de $-f$ tem a concavidade voltada para cima em I.

Mas dizer que o conjunto A_f é convexo é equivalente a afirmar que para quaisquer pontos a e b pertencentes a I tais que $a < b$, o gráfico de f em [a,b] está abaixo do gráfico do segmento de extremos *(a,f(a))* e *(b,f(b))*, isto é, $f(x) \leq r(x)$, $\forall x \in I$, em que $r(x) = f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ é a equação da recta que passa pelos pontos *(a,f(a))* e *(b,f(b))*.

Com efeito:

Se A e B são quaisquer dois pontos sobre o gráfico de f com abcissas a e b e se A_f é um conjunto convexo, o segmento com extremos A e B está contido em A_f, e assim qualquer ponto *(x,f(x))* com $x \in [a,b]$ está abaixo do segmento de extremos A e B.



Reciprocamente, tomem-se quaisquer dois pontos P e Q em A_f, com abcissas a e b. Se todo o ponto *(x,f(x))* com $x \in [a,b]$ está abaixo do segmento de extremos A e B, o segmento de extremos A e B está totalmente contido em A_f, o mesmo se passando então com o segmento de extremos P e Q, já que este está acima do segmento de extremos A e B.

Assim, a definição 1 é equivalente a:

Definição 1'.

O gráfico de uma função f tem a concavidade voltada para cima num intervalo aberto I de IR se para quaisquer pontos a e b pertencentes a I tais que a<b, o gráfico de f em $[a,b]$ está abaixo do segmento de recta de extremos *(a,f(a))* e *(b,f(b))*.

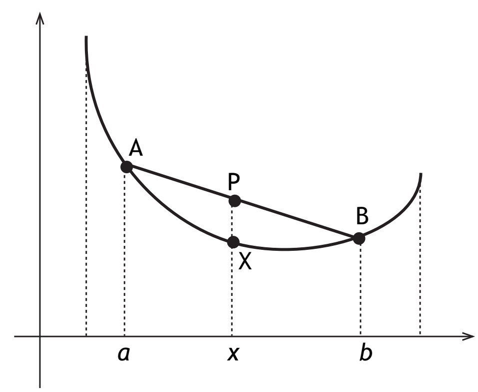
No Ensino Secundário o estudo do sentido da concavidade do gráfico de uma função faz-se apenas para funções diferenciáveis. Trata-se de um estudo intuitivo que associa a forma do gráfico à variação do declive das tangentes em pontos sucessivos do gráfico: se o declive aumenta quando o ponto de tangência se desloca da esquerda para a direita, o gráfico tem a concavidade voltada para cima e se o declive diminui, o gráfico tem a concavidade voltada para baixo. Atendendo a que o aumento do declive está associado ao crescimento da função derivada, tem-se:

Definição 2.

O gráfico de uma função f , diferenciável num intervalo aberto I de IR, tem a concavidade voltada para cima em I se *f'* é crescente em I.

Se *f* é diferenciável num intervalo aberto *I* de *IR*, as definições 1 e 2 são equivalentes.

Com efeito:



Suponha-se que A_f é convexo em *I* e sejam a, b $\in$ *I* tais que a<b. Considerem-se os pontos A(a,*f*(a)), B(b,*f*(b)) e seja P o ponto sobre o segmento [AB] (de extremos A e B) com abcissa x. Comparem-se os declives dos segmentos [AX], [AP], [PB] e [XB], em que X é o ponto do gráfico de *f* com abcissa x.

Tem-se:
declive de [AX]$\leq$ declive de [AP] = declive de [PB]$\leq$ declive de [XB], isto é,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(x)-f(b)}{x-b} .$$

Como *f* é diferenciável em *a* e em *b*, passando ao limite quando $x \to a^+$ e $x \to b^-$, conclui-se que

$$f'(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'(b) \quad ,$$

e assim, $f'(a) \leq f'(b)$.

Reciprocamente, suponha-se que *f'* é crescente no intervalo aberto *I*, tomem-se dois pontos a, b $\in$ *I* tais que a<b e verifique-se que o gráfico de *f* em [a, b] se encontra abaixo do segmento de extremos A*(a,f(a))* e B*(b,f(b))*, isto é, A_f é convexo (definição 1').

Seja então $r(x) = mx + p$ a equação da recta AB e prove-se que, para todo o *x* em [*a*,*b*] se tem $g(x)= r(x) - f(x) \geq 0$.

Como *g* é diferenciável em [*a*,*b*] e $g(a) = g(b) = 0$, existe $c \in \,]a,b[$ tal que $g'(c) = 0$ (pelo teorema de Rolle). Como, por hipótese, *f'* é crescente e *I* e $g'(x) = m - f'(x)$, *g'* é decrescente em *I*.

Assim:

- $x \in \,]a,c[\Rightarrow g'(x) \geq g'(c) = 0 \Rightarrow g$ é crescente em $[a,c] \Rightarrow g(x) \geq g(a) = 0$;
- $x \in \,]c,b[\Rightarrow g'(x) \leq g'(c) = 0 \Rightarrow g$ é decrescente em $[c,b] \Rightarrow g(x) \geq g(b) = 0$.

Então $g(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$ e A_f é convexo.

No caso da função f ser duas vezes diferenciável num intervalo aberto I, resulta da definição 2 a caracterização das concavidades da função à custa do sinal da segunda derivada:

Teorema 1

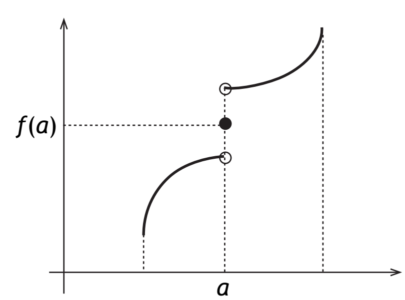
Seja f uma função duas vezes diferenciável num intervalo aberto I. O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em I se e só se $f''(x) \geq 0, \forall x \in I$.

A demonstração deste teorema resulta imediatamente da relação bem conhecida entre o crescimento de uma função diferenciável num intervalo e o sinal da sua derivada.

Ponto de inflexão

Tal como se disse anteriormente, a designação de ponto de inflexão está usualmente associada a uma mudança do sentido da concavidade (para cima ou para baixo) do gráfico de uma função à esquerda e à direita desse ponto, isto é, uma função f tem uma inflexão para $x = a$, ou no ponto $(a,f(a))$, se no ponto $(a,f(a))$ se verifica a mudança do sentido de concavidade do seu gráfico.

Assim, a função f representada no gráfico seguinte, tem uma inflexão para $x = a$:



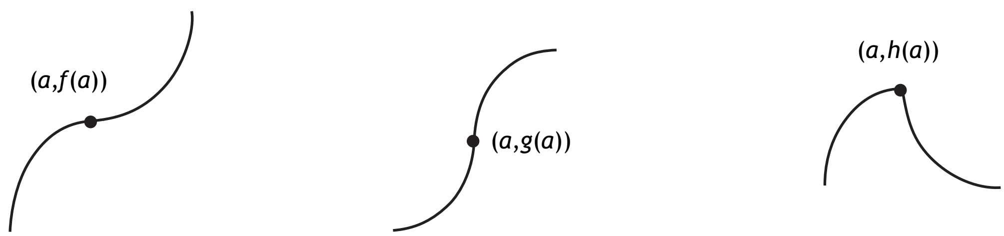
A designação de ponto de inflexão é geralmente reservada para pontos onde a função é contínua.

Mais precisamente:

Definição 3:

Seja I intervalo aberto, a um ponto de I, e f uma função contínua em I. A função tem um **ponto de inflexão** para x = a, ou no ponto $(a,f(a))$, se existe $\varepsilon > 0$ tal que o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima (para baixo) em $]\, a-\varepsilon, a\,[$ e voltada para baixo (para cima) em $]\, a, a+\varepsilon\,[$.

Nas figuras seguintes ilustram-se pontos de inflexão, de acordo com a definição anterior:



(1) (2) (3)

Um grande número de autores (ver, por exemplo, [1], [4], [5], [6]) definem ponto de inflexão apenas para funções com derivada (finita ou infinita) nesse ponto. Assim, não consideram que exista ponto de inflexão no caso (3).
Da observação dos exemplos (1) e (2) parece que a existência de inflexão está associada à posição relativa entre a tangente no ponto (a tracejado na figura) e o gráfico da função, à sua direita e à sua esquerda.

(1) (2)

Ponha-se então a seguinte definição:

Definição 4:

Seja I um intervalo aberto de IR, $a \in I$, $f: I \to IR$ uma função com derivada no ponto a. Designe-se por t a tangente em $(a,f(a))$.
(i) Se f tem derivada finita em a, o ponto (a,f(a)) é um ponto de inflexão se em $]a-\varepsilon, a[$ o gráfico de f está acima (abaixo) de t e em $]a, a+\varepsilon[$ o gráfico de f está abaixo (acima) de t.
(ii) Se f tem derivada infinita em a, o ponto $(a,f(a))$ é um ponto de inflexão se em $]a-\varepsilon, a[$ o gráfico de f está à direita (à esquerda) de t e em $]a, a+\varepsilon[$ o gráfico de f está à esquerda (à direita) de t.

Comparem-se as definições 3 e 4. A definição 3 parece contemplar mais casos de ponto de inflexão, como o ilustrado em (3). Será que, no caso da função considerada ter derivada num ponto a, é equivalente afirmar que existe mudança de sentido de concavidade do gráfico da função à esquerda e à direita de a e que o gráfico da função "atravessa" a tangente em $(a,f(a))$?

A resposta é negativa.

Com efeito, considere-se a função definida em IR por

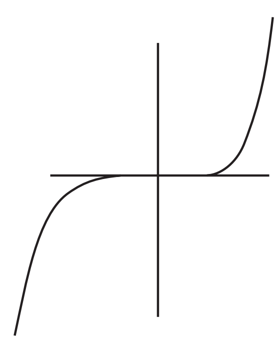
$$f(x)=\begin{cases} x^5\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)+2\right) & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$$

Trata-se de uma função duas vezes diferenciável em *IR*, tendo-se

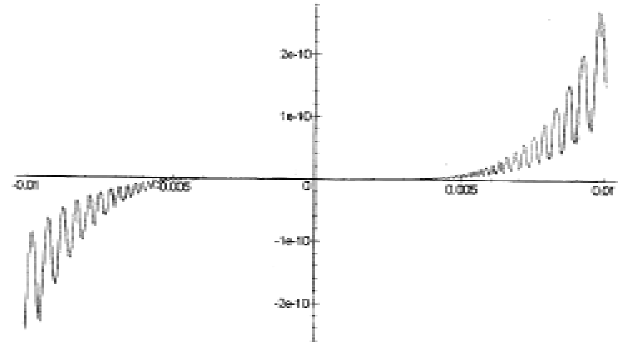
$$f'(x)=\begin{cases} 5x^4\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)+2\right)-x^3\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$$

A equação da tangente ao gráfico de f no ponto (0,0) é $t(x) = 0$. Tem-se $f(x) > t(x)$ para $x > 0$ e $f(x) < t(x)$ para $x < 0$. Então, de acordo com a definição 4, (0,0) é um ponto de inflexão.

Uma análise precipitada das características da função a partir de um seu gráfico, como o ilustrado na figura seguinte pode levar a concluir que também existe uma mudança do sentido da concavidade em (0,0).



Mas a imagem seguinte, obtida para $x\in[-0{,}01;\,0{,}01]$, já alerta para a possibilidade da não conservação do sentido da concavidade em nenhum intervalo $]-\varepsilon, 0[$ ou $]0, \varepsilon[$ para $\varepsilon < 0{,}01$:

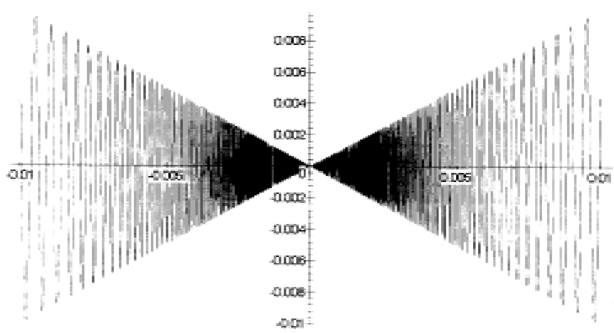


Analise-se a segunda derivada de f:

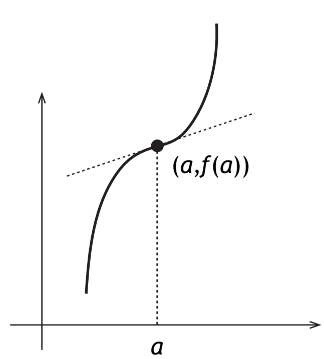
$$f''(x)=\begin{cases}20x^3\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)+2\right)-8x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)-x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$$

Observe-se que $f''\left(\frac{1}{2n\pi}\right)<0$ e $f''\left(\frac{1}{\frac{3\pi}{2}+2n\pi}\right)>0$, com $n\in IN$, não se podendo portanto dizer que f'' seja positiva ou negativa em algum intervalo $\left]-\varepsilon,0\right[$ ou $\left]0,\varepsilon\right[$ (para $\varepsilon<1/6$), pelo que, de acordo com a definição 3, não existe inflexão em (0,0).

Representa-se no gráfico seguinte a função f'' no intervalo [-0,01;0,01], que evidencia o facto de f'' não ser positiva ou negativa em nenhum intervalo $\left]-\varepsilon,0\right[$ ou $\left]0,\varepsilon\right[$, para $\varepsilon<0{,}01$:



Observe-se que, no caso de a função f ser diferenciável em a, a definição 3 implica a definição 4. Com efeito suponha-se que f tem um ponto de inflexão em $(a,f(a))$, de acordo com a definição 3. Então existe $\varepsilon>0$ tal que em $\left]a-\varepsilon,a\right[$ e em $\left]a,a+\varepsilon\right[$ o sentido das concavidades é diferente. Considere-se o caso em que em $\left]a-\varepsilon,a\right[$ a concavidade está voltada para baixo e em $\left]a,a+\varepsilon\right[$ a concavidade está voltada para cima (sendo a verificação análoga no caso do sentido das concavidades ser oposto).



Se o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $\left]a,\ a+\varepsilon\right[$, conforme já se observou a propósito da equivalência das definições 1 e 2 de sentido da concavidade, se $b\in\left]a,\ a+\varepsilon\right[$, então $f'(a)=f'_d(a)\leq\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ e assim $f(b)\geq f(a)+f'(a)(b-a)$, isto é o gráfico de f está, em $\left]a,\ a+\varepsilon\right[$, acima da tangente em (a,f(a)). Analogamente se verifica que o gráfico de f está, em $\left]a-\varepsilon,\ a\right[$, abaixo da tangente em (a,f(a)). Então, o ponto (a,f(a)) é um ponto de inflexão de acordo com a definição 3.

O resultado seguinte dá uma condição necessária para a existência de ponto de inflexão, podendo a inflexão ser entendida no sentido da definição 3 ou da definição 4:

Teorema 2:

Se a função f definida num intervalo aberto I de IR é duas vezes derivável num ponto $a\in I$ e f tem um ponto de inflexão em $(a,f(a))$, no sentido da definição 3 ou da definição 4, então $f''(a)=0$.

Este resultado é apresentado por vários autores como uma aplicação da fórmula de Taylor (veja-se, por exemplo, [1], [4], [6]).

A condição expressa no teorema 2 não é suficiente para a existência de ponto de inflexão. Com efeito, a função $f: IR\to IR$ definida por $f(x)=x^4$ é tal que $f''(0)=0$ e f não tem um ponto de inflexão em (0,0).

Conclusão

Para as definições 3 e 4 encontram-se exemplos em que existe ponto de inflexão de acordo com uma delas e não existe ponto de inflexão de acordo com a outra.

Das definições dadas nenhuma é "mais verdadeira" que a outra. Elas coincidem em algumas situações, mas são definições diferentes, pelo que a análise da existência de inflexão, usando uma e outra, pode conduzir a conclusões diferentes. É pois essencial clarificar qual a definição adoptada.

Bibliografia

[1] Campos Ferreira, J., *Introdução à Análise Matemática*, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa (1993)

[2] Choquet, G., *Cours d'Analyse - tome II - Topologie*, Masson et C ie, Paris (1969)

[3] Dixmier, J., *Cours de Mathématique du premier cycle*, Gautier-Villars Éditeur, Paris (1972)

[4] Figueira, M., *Fundamentos de Análise Infinitesimal*, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (1996)

[5] Gonçalves, J. Vicente, *Curso de Álgebra Superior*, Lisboa (1953)

[6] Guerreiro, J. Santos, *Curso de Análise Matemática*, Escolar Editora (1989)

[7] Sebastião e Silva, J. e Silva Paulo, J.D., *Compêndio de Álgebra*, Tomo 1, Braga (1970)

[8] Smirnov, V.I., *A course of Higher Mathematics*, vol. I, Pergamon Student Editons, Londres (1964)

[9] Swokowski, E.W., *Cálculo com Geometria Analítica*, McGraw-Hill, São Paulo, (1983)